

桃園市武陵高中 112 下高二期末考

第壹部分：選擇（填）題（占 82 分）

一、多選題（占 16 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 8 分。(8-5-2-0)

1. 下列關於線性變換的敘述何者正確？

(1) 若將直線 $L: x - 2y + 3 = 0$ 以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 2 倍，且沿著 y 軸方向伸縮 3 倍得到直線 L' ，則向量 $\vec{u} = (2, -6)$ 是直線 L' 的一個法向量

(2) 若方陣 A 表示以原點為中心，依逆時針方向旋轉 θ 角 ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) 的旋轉矩陣且滿足

$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 則 } \theta = 60^\circ$$

(3) 若方陣 B 表示以直線 $y = 3x$ 為對稱軸的鏡射矩陣，則 $B^{10} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

(4) 三頂點坐標為 $O(0, 0)$, $P(3, 0)$, $Q(3, 4)$ 的直角三角形 OPQ ，經水平推移矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k \neq 0$ ，變換後不可能為直角三角形

(5) 若 P 點經矩陣 $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ 變換後落在第一象限，則 P 點經矩陣 $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ 變換後的位置必不在第二象限

2. 袋中有大小相同的 3 顆紅球與 2 顆白球，自袋中任取一球（每球被取到的機會均等），取後放回，取球五次，記錄每次所取出的顏色結果。令 A 表示取球過程中有連續三次恰好抽中「紅球、紅球、白球」的事件， B 表示取球過程中有連續三次恰好抽中「紅球、白球、白球」的事件，請問下列哪些選項正確？

(1) $P(A) = \frac{54}{125}$

(2) A 和 B 為獨立事件

(3) A 和 B 為互斥事件

(4) $P(B | A) = \frac{4}{15}$

(5) $P(B | A') = \frac{11}{15}$

二、填充題（占 66 分）

說明：第 3 題至第 13 題，配分如下。											
答對總題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
得分	10	18	26	34	40	46	52	56	60	63	66

3. 設 A 是 $m \times n$ 階矩陣， B 是 3×6 階矩陣，若 AB 有意義且矩陣 AB 的元共有 24 個，求數對 (m, n) 為【 】。

4. 已知聯立方程式
$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + 2y + z = 4 \\ 5x + y + kz = 3 \end{cases}$$
 無解，求實數 k 值為【 】。

5. 已知矩陣 A, B 滿足 $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ， $A - B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ， $AB = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ ， $BA = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$ ，求 $A^2 - B^2 =$ 【 】。

6. 某校數學模擬考評分後將全校同學依總分由高到低排序：前 30% 的同學屬於甲組，後 20% 的同學屬於丙組，其餘的同學屬於乙組。進一步分析同學的答題情形，得到計算題答對率如下表：

	甲組	乙組	丙組
計算題答對率	100%	80%	40%

試問從計算題答對的同學中任選一人，此人屬於乙組的機率為【 】。

7. 設 k 為整數，若坐標平面上的 $\triangle PQR$ 經矩陣 $A = \begin{bmatrix} k & 5 \\ -1 & k-5 \end{bmatrix}$ 線性變換後對應的圖形為 $\triangle P'Q'R'$ ，且三角形面積保持不變，則滿足條件的所有整數 k 值的總和為【 】。

8. 甲乙兩選手參加 5 戰 3 勝制 (即先勝 3 場者贏得比賽，每場沒有和局) 的桌球單打比賽。已知乙選手單場獲勝的機率為 $\frac{1}{4}$ 且每場的比賽結果互不影響，求乙選手贏得比賽的機率為【 】。

9. 已知甲袋內有 3 顆紅球、1 顆白球；乙袋內有 2 顆紅球。今從甲袋中取出一球放入乙袋，再從乙袋中取出一球放回甲袋。設每球被取到的機率都相等，求操作完後甲袋仍有 3 顆紅球、1 顆白球的機率為【 】。

10. 已知增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -2 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 5 \end{array} \right]$ 經過列運算後，得 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array} \right]$ ，求數對 (a, b) 為【 】。

11. 設 $P(X)$ 表示事件 X 發生的機率，而 $P(X|Y)$ 表示在事件 Y 的條件下，事件 X 生的機率。今有 2 顆黑球、2 顆白球、3 顆紅球共 7 顆大小相同的球排成一列。設事件 A 為 2 顆黑球不相鄰的事件，而事件 B 為任 2 顆紅球都不相鄰的事件，求 $P(A|B) = \text{【 } \quad \text{】}$ 。

12. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $A + A^{-1} = O$ ，其中 $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。若方程組 $\begin{cases} ax + by = 3 \\ cx + dy = 4 \end{cases}$ 恰有唯一解為 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ ，則 $a + b + c + d$ 之值為 $\text{【 } \quad \text{】}$ 。

13. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ，矩陣 $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 且 C 為二階方陣，若 $ACA + BCB = ACB + BCA + I$ ，其中 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 $C = \text{【 } \quad \text{】}$ 。

第貳部分：混合題（占 18 分）

說明：本部分共有 2 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

14 — 16 題組

小明使用 4 顆相同的紅色球與 2 顆相同的黑色球共 6 顆球與一個球袋做機率實驗。將 5 顆球放入袋中，1 顆球拿在手上，因此會出現以下兩種狀況：袋中有 3 顆紅色球，2 顆黑色球，手上拿著 1 顆紅色球，我們將這種情況稱為狀態 1；袋中有 4 顆紅色球，1 顆黑色球，手上拿著 1 顆黑色球，我們將這種情況稱為狀態 2。現在開始操作：自袋中取出 1 球（每球被取到機會均等），再將原本手中拿著的球放回袋中，而袋中剛抽出來的球拿在手上，這樣稱做一次操作，每次操作可能會改變原來的狀態也可能不會改變原來的狀態。試回答下列問題：

14. 如果袋中的球是 4 紅 1 黑（狀態 2），請問經過一次操作後袋中會變成 3 紅 2 黑（狀態 1）的機率為何？（單選題，2 分）

- (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $\frac{1}{5}$ (5) 0

15. 把從狀態 j 經過一次操作後變成狀態 i 的機率記為 p_{ij} ，例如 (1) 的機率就是 p_{12} ，由此可得一個 2×2 的方陣 $P = [p_{ij}]_{2 \times 2}$ ，關於方陣 P 的敘述，請選出正確的選項。（多選題，4 分，4-2-0）

- (1) $p_{12} = p_{21}$ (2) $p_{11} + p_{12} = 1$ (3) $\det(P) < 0$
 (4) 方陣 P^2 是轉移矩陣 (5) 方陣 P^{-1} 是轉移矩陣

16. 若一開始手上拿的是紅球，則操作 3 次後，手上還是紅球的機率為何？(非選擇題，4 分)

17 — 18 題組

在坐標平面上，二階方陣 M 對應的線性變換是將點 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 變換到點 $P'(\cos \theta, 0)$ ；將點 $Q(-\sin \theta, \cos \theta)$ 變換到點 $Q'(0, \cos \theta)$ ，其中 $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ 。若 k 為非零實數，使得 $M^3 = kI$ ，其中 I 為二階單位方陣。試回答下列問題：

17. 二階方陣 M 對應的線性變換是下列哪一個選項？(單選題，2 分)

- (1) 旋轉
- (2) 鏡射
- (3) 伸縮與旋轉的合成
- (4) 伸縮與鏡射的合成
- (5) 推移

18. 求 θ 值與 k 值。(非選擇題，6 分)

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 5 2. 14

3. (4, 3)

4. 5

5. $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

6. $\frac{20}{39}$

7. 10

8. $\frac{53}{512}$

9. $\frac{5}{6}$

10. $(1, 1)$

11. $\frac{4}{5}$

12. 1

13. $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

第貳部分：混合題

14. 1 15. 34 16. $\frac{83}{125}$

17. 3 18. $k = -\frac{1}{8}, \theta = \frac{2\pi}{3}$