

台中市台中女中 112 上高三第二次期中考

第壹部分：選擇（填）題（占 88 分）

一、多選題（占 28 分）

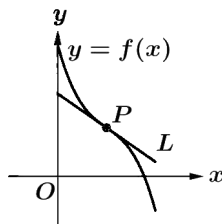
說明：第 1 題至第 4 題，每題 7 分。(7-4-1-0)

1. 關於函數 $f(x) = 3(x+1)^5 - 5(x+1)^4 - 1$ 的描述，下列敘述何者正確？

- (1) 在 $-2 \leq x \leq 1$ 範圍內，函數 $f(x)$ 有一個極大值及一個極小值
- (2) 函數 $f(x)$ 的圖形有兩個反曲點
- (3) 函數 $f(x)$ 的圖形以反曲點為對稱中心
- (4) 函數 $f(x)$ 圖形的所有切線中，最小切線斜率為 -5
- (5) 五次方程式 $f(x) = 0$ 只有一個實根

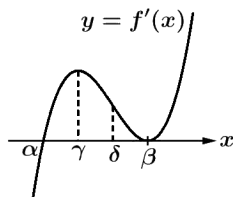
2. 圖為三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的部分圖形，其中 L 為過反曲點 P 之切線，則下列選項何者正確？

- (1) $a < 0$
- (2) $b > 0$
- (3) $c < 0$
- (4) $d > 0$
- (5) $b^2 - 3ac < 0$



3. 已知 $f'(x)$ 與 $f''(x)$ 分別為多項式函數 $f(x)$ 的一階與二階導函數，且 $f'(x)$ 為三次函數，函數圖形如右圖所示，其中 $x = \beta$ 與 $x = \gamma$ 為 $f'(x)$ 的極值發生處， $x = \delta$ 為反曲點發生處。此外， $f'(x)$ 與 x 軸交於 $(\alpha, 0)$ 與 $(\beta, 0)$ ，則下列敘述何者正確？

- (1) 函數 $f(x)$ 的圖形在 $x < \alpha$ 時為遞減，在 $x > \alpha$ 時為遞增
- (2) 函數 $f(x)$ 的圖形在 $x = \alpha$ 及 $x = \beta$ 兩處產生極值
- (3) 函數 $f(x)$ 的圖形在 $x = \beta$ 及 $x = \gamma$ 兩處產生反曲點
- (4) 函數 $f''(x)$ 的圖形為一開口朝下之拋物線
- (5) 函數 $f''(x)$ 的圖形以 $x = \delta$ 為對稱軸，且與 x 軸交於 $(\beta, 0)$ 與 $(\gamma, 0)$



4. 下列敘述何者正確？

- (1) 設 $f(x)$ 為一連續函數，若 $x < a$ 時， $f'(x) < 0$ ；而 $x > a$ 時， $f'(x) > 0$ ，但 $f'(a)$ 不存在，則 $f(a)$ 不為極值
- (2) 設 $f(x)$ 為一可微分函數，若 $f'(a) = 0$ ，則 $f(a)$ 為極值
- (3) 設 $f(x)$ 的二階導函數存在，若 $(a, f(a))$ 為 $f(x)$ 圖形之反曲點，則 $f''(a) = 0$
- (4) 設 $f(x)$ 的二階導函數存在，若 $f'(a) = 0$ 且 $f''(a) > 0$ ，則 $f(a)$ 為一極小值
- (5) 設 $f(x)$ 的二階導函數存在，若 $f'(a) = f''(a) = 0$ ，則 $f(a)$ 必不為極值

二、填充題（占 60 分）

說明：第 5 題至第 15 題，每格 5 分。

5. 已知函數 $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x+5}$ ，則 $f(x)$ 在 $x = -2$ 處的導數 $f'(-2)$ 為【 】。

6. 設多項式 $f(x) = x^{10} + 10x + 9$ ， $g(x) = (x-1)^3$ ，求下列各小題：

(1) 若將 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得之餘式表達成 $a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2$ 之型態，則序列 $(a_0, a_1, a_2) =$ 【 】。

(2) 利用 $f(x)$ 在 $x = 1$ 附近的一次估計式求 $f(1.01)$ 的近似值，其值為【 】。

7. 設函數 $f(x) = (x-1)^2(2-x)^3$ 的圖形為 Γ ，則 Γ 上以 $P(3, -4)$ 為切點的切線方程式為【 】。
8. 設函數 $f(x) = (x-2)^3$ 的圖形為 Γ ，則通過 $P(1, 4)$ 且與 Γ 相切的直線方程式為【 】。
9. 設 $f(x)$ 為三次函數，最高次項係數為 2。若 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = -8$ 且 $f(x)$ 在 $x=2$ 處之切線的斜率最小，則 $f(x) =$ 【 】。
10. 兩函數圖形 $y = 4x^2 - 8x$ 與 $y = x^2 - 8x + 48$ 之公切線方程式為【 】。
11. 若方程式 $x^3 - 6x^2 + 9x + a = 0$ 有三個相異實根，則 a 的範圍為【 】。
12. 若三次函數 $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + 2x^2 + (a-3)x + 1$ 為一遞增函數，則 a 的範圍為【 】。
13. 咳嗽是利用氣管收縮所產生的壓力差，加速氣體流動，進而將氣管中的氣體或異物排出體外。假設原來氣管的半徑為 1 單位，當氣管收縮後的半徑為 x 單位時，氣體流動的速度 $V(x)$ 可用函數 $V(x) = c(1-x)x^4$ 表示，其中 c 是一個固定的正數。當氣管收縮後的半徑 $x =$ 【 】單位時，氣體有最大的流動速度。
14. 將區間 $[0, 2\pi]$ 平分 12 等分，則函數 $y = |\sin x|$ 在此區間內與 x 軸所圍成的區域面積之下和為【 】。
15. 已知一球體半徑為 2，則包容球體之直圓錐的最小體積為【 】。

第貳部分：混合題（占 12 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

16 — 18 題組

將區間 $[0, 1]$ 平分 成 n 等分，考慮函數 $f(x) = -2x^2 + 2$ 在此區間內與 x 軸所圍成的區域面積：

16. 試求上和 U_n 及下和 L_n 。（非選擇題，4 分）

17. 試求滿足 $|U_n - L_n| < 0.01$ 之最小自然數 n 。(非選擇題，4 分)

18. 利用上和 U_n 及下和 L_n 求出 $\int_0^1 (-2x^2 + 2) dx$ 的值。

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 45

2. 12345

3. 135

4. 34

5. $\frac{1}{3}$

6. (1) (20, 20, 45) ; (2) 20.2

7. $y = -16x + 44$

8. $y = 12x - 8$

9. $2x^3 - 12x^2 + 16x$

10. $y = 8x - 16$ 或 $y = -24x - 16$

11. $-4 < a < 0$

12. $a \geq 4$

13. 0.8

14. $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)\pi$

15. $\frac{64\pi}{3}$

第貳部分：混合題

16. $U_n = \frac{4}{3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^2}$, $L_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^2}$

17. 201

18. $\frac{4}{3}$