

112 學年度第二學期第二次定期考高二數 B 試題

命題範圍：第二章 矩陣與資料表格

一、單選題（每題 6 分，共 18 分）

1. 設 A 為 2×2 階矩陣，且對任意實數 x, y ，則 $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ 均成立。試求矩陣

$$A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = ? \quad (1) \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (5) \text{ 以上皆非}$$

2. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，若 $A^7 - 3A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a + b + c + d$ 之值為下列哪一個選項？(1) -8 (2) -5 (3) 5 (4) 8 (5) 10

3. 設大華上個學期國文、英文、數學、社會四科的成績如右表：已知「平時、段考、期考」之成績分別占學期成績的 30% 、 40% 、 30% ，若大華國文、英文、數學、社會四科的學期成績分別是 a, b, c, d ，則下列哪一個選項正確？

$$(1) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90 & 95 & 82 \\ 94 & 88 & 90 \\ 84 & 75 & 85 \\ 92 & 80 & 86 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 94 & 84 & 92 \\ 95 & 88 & 75 & 80 \\ 82 & 90 & 85 & 86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 94 & 84 & 92 \\ 95 & 88 & 75 & 80 \\ 82 & 90 & 85 & 86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

(5) 以上皆非

成績 學科 \	平時成績 (30%)	段考成績 (40%)	期考成績 (30%)
國文	90	95	82
英文	94	88	90
數學	84	75	85
社會	92	80	86

$$(4) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 95 & 82 \\ 94 & 88 & 90 \\ 84 & 75 & 85 \\ 92 & 80 & 86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

二、多重選擇題（每題 8 分，共 24 分）

說明：每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 請選出使矩陣 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 不可逆的選項？

(1) $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ (2) $|a_1 a_4| = |a_2 a_3|$ (3) 數列 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列

(4) 數列 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列 (5) 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_n \times a_{n+1} \end{cases}$, n 為正整數

5. 設 A, B, C 皆為 2 階方陣， I 為 2 階單位方陣，則下列何者正確？

(1) 若 $A^2 = I$ ，則 $A = I$ 或 $A = -I$ (2) 若 $AB = I$ ，則 $BA = I$

(3) $\det(5A) = 5 \det(A)$

(4) 若 AB 的乘法反方陣存在，則 A 和 B 的乘法反方陣也都存在

(5) 若 $AB = BC$ 且 B^{-1} 存在，則 $A = C$

6. 設 A, B, C 皆為 n 階方陣， I_n 為 n 階單位方陣， O_n 為 n 階零方陣，選出正確的選項？

(1) 若 $AB = O_n$ 且 $A \neq O_n$ ，則 $B = O_n$ (2) 若 $A + B = C$ ，則 $AB + B^2 = BC$

(3) 若 $AB = I_n = BA$ 且 $AC = I_n = CA$ ，則 $B = C$ (4) 若 $A^2 = I_n$ ，則 $A = A^{-1}$

(5) 若 $AC = I_n = CA$ ，則 $(ABC)^n = AB^n C$

三、填充題（每題 6 分，共 48 分）

7. 設 M 是一個 3×2 階的矩陣且 $M \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ ， $M \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ，

則 $M \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, 則 $A^2 + AB - BA - B^2 =$ _____。

9. 設 $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $AB + BA = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, 求 $A^2 + B^2 =$ _____。

10. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$, 若 $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 成立, 則 $x =$ _____。

11. 設 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 若 $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 = aI_2 + bA$, 其中 a, b 為實數, 則數對 $(a, b) =$ _____。

12. 已知 A 為二階方陣, 滿足 $A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $A^5 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, 則 $A^4 =$ _____。

13. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$,

其中 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ 為矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的反方陣。

若 $A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$, 則 $a + b + c + d =$ _____。

14. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 若矩陣 X 滿足 $AX - X = 9(A + I)$,

則矩陣 $X =$ _____。

四、混合題（題組，共 10 分）

15. 設方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，試回答下列問題：

(1) A^3 的所有元總和為（單選題，3 分）

(A) 32 (B) 40 (C) 48 (D) 56 (E) 64

(2) n 為正整數，推測 $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（填充題，3 分）

(3) 證明上述推測。（非選擇題，4 分）