

112 學年度第一學期第二次定期考高三數甲試題

命題範圍：第二章微分

一、多選題(每題 8 分，共 24 分)

說明：每題至少有一個選項是正確。每題全部答對得 8 分，只錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答者不給分。

1. 下列哪些函數在 $x = 2$ 處可微分？

- (1) $f(x) = |x - 2|$ 。
- (2) $f(x) = [(x - 2)^2]$ ，其中 $[\]$ 表高斯符號。
- (3) $f(x) = (x - 2) \times |x - 2|$ 。
- (4) $f(x) = |x^2 + x - 6| = |(x - 2)(x + 3)|$ 。
- (5) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 2 \\ x^2 + x, & x < 2 \end{cases}$ 。

2. 已知 $f(x)$ 為一個實係數多項式函數，請選出正確的選項。

- (1) 若 $f(x)$ 在 $x = c$ 處有極值，則 $f'(c) = 0$ 。
- (2) 若 $f'(c) = 0$ 且 $f''(c) \neq 0$ ，則 $f(x)$ 在 $x = c$ 處有極值。
- (3) 若點 $(c, f(c))$ 為函數圖形 $y = f(x)$ 的反曲點，則 $f''(c) = 0$ 。
- (4) 若 $f'(c) = f''(c) = 0$ ，則 $f(c)$ 不是極值。
- (5) 若 $f(x)$ 在區間 (a, b) 內為嚴格遞增函數，則區間 (a, b) 中的任意實數 x ，恆有 $f'(x) > 0$ 。

3. 已知 $f(x) = a(x - 3)^3 + b(x - 3)^2 + c(x - 3) + d$ 為一個實係數三次函數，請選出正確的選項。

- (1) 若 $f''(t) = 0$ ，則 $y = f(x)$ 的反曲點為 $(t, f(t))$ 。
- (2) 若 $b = 0$ ，則函數圖形 $y = f(x)$ 的反曲點為 $(3, d)$ 。
- (3) 若 A 、 B 、 C 為函數圖形 $y = f(x)$ 上相異三點滿足 B 為 A 和 C 的中點，則 $y = f(x)$ 的反曲點為點 B 。
- (4) 若 $b = 0$ 且 $ac > 0$ ，則 $f(x)$ 為嚴格遞增函數。
- (5) $y = f(x)$ 在 $x = 3$ 處的一次近似為 $y = f'(3)(x - 3) + d$ 。

二、選填題(每題 6 分，共 54 分)

1. 設函數 $f(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-3)}$ ，則 $f'(5) = \frac{\textcircled{4}}{\textcircled{5}\textcircled{6}}$ 。

2. 設函數 $g(x) = (x^2 + 2x - 9)^5$ ，則 $g(x)$ 在 $x = 2$ 處的導數為 $\textcircled{7}\textcircled{8}$ 。

3. 設函數 $f(x) = x^3 - 8x + 4$ ，則過點 $P(1,1)$ 的切線方程式為

$y = \textcircled{9}\textcircled{10}x + \textcircled{11}$ 。

4. 設 $f(x), g(x)$ 皆為首項係數為 1 的二次函數，且 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 5$ ，

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-5}{x-2} = 3$ 。

令 $F(x) = f(x)g(x)$ ，則 $F'(2) = \textcircled{12}\textcircled{13}$ 。

5. 給定實數 a, b ，設函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 2 \\ ax + b[x^2], & x < 2 \end{cases}$ ，其中 $[x^2]$ 表示不大於

x^2 的最大整數。若 $f(x)$ 在 $x = 2$ 處可微分，則數對 $(a, b) = (\textcircled{14}, \textcircled{15} \frac{\textcircled{16}}{\textcircled{17}})$ 。

6. 設實係數二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，且圖形 $y = f(x)$ 在 $x = 3$ 處的切線為 $y = 6x - 26$ 。令 $g(x) = (x - 1)f(x)$ 。若 $g(x)$ 在 $x = 1$ 處有極值，則

$(a, b, c) = (\textcircled{18}, \textcircled{19}\textcircled{20}\textcircled{21}, \textcircled{22}\textcircled{23})$ 。

7. 設函數 $f(x) = 2x^3$ 與 $g(x) = 6x + k$ 兩圖形有三個相異交點 (x_1, y_1) 、

(x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 滿足 $x_1 x_2 x_3 < 0$ ，則實數 k 的範圍為 $\textcircled{24}\textcircled{25} < k < \textcircled{26}$ 。

8. 已知四次函數 $f(x)$ 有兩個反曲點 $(2,4), (-1,85)$ ，且 $y = f(x)$ 在 $x = -1$ 處的切線與 x 軸平行，則 $f(1) = \underline{\textcircled{27} \textcircled{28}}$ 。

9. 建國油行預計生產一瓶容器為圓柱形(含蓋子)的沙拉油，容量為 4 公升。
為了使該容器的生產成本最低(即表面積最小)，則此圓柱形容器的底部圓

形的半徑為 $\textcircled{29} \textcircled{30} \sqrt{\frac{\textcircled{31}}{\pi}}$ 公分。(註：1L = 1000ml = 1000 立方公分)

三、計算證明題(佔 22 分)

1. 設函數 $f(x) = x^4 - 18x^2$ ，請回答下列問題。

- (1) 討論函數 $f(x)$ 的遞增、遞減區域。(3 分)
- (2) 試求函數 $f(x)$ 的所有極值發生的點坐標。(3 分)
- (3) 討論函數 $f(x)$ 的凹向性。(3 分)
- (4) 試求函數 $f(x)$ 的所有反曲點。(3 分)

2. 設 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$ ，試求

- (1) $f'(6)$ 的值。(4 分)
- (2) $f''(6)$ 的值。(6 分)