

台北市師大附中 112 上高一期末考

一、單選題（占 8 分）

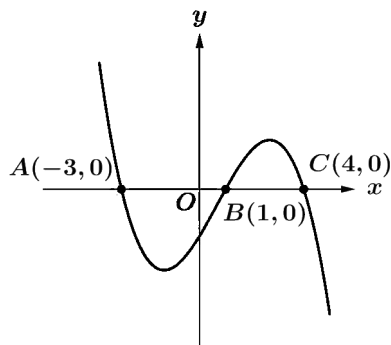
說明：第 1 題至第 2 題，每題 4 分。

1. 若多項式 $f(x)$ 除以 $3x+2$ 的餘式為 9，則 $x^2f(x)$ 除以 $x+\frac{2}{3}$ 的餘式為何？

- (1) $9x^2$
- (2) $27x^2$
- (3) 9
- (4) 3
- (5) 4

2. 右圖為三次實係數多項式函數 $y=f(x)$ 的圖形，其與 x 軸交於 $A(-3,0)$ 、 $B(1,0)$ 、 $C(4,0)$ 三點，則不等式 $(x+1)^3 f(x-2) \geq 0$ 的整數解有多少個？

- (1) 0 個
- (2) 4 個
- (3) 5 個
- (4) 8 個
- (5) 無限多個



二、多選題（占 32 分）

說明：第 3 題至第 6 題，每題 8 分。(8-4.8-1.6-0)

3. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - 7x + 6$ 所得餘式為 $-x - 3$ ； $f(x)$ 除以 $x^2 - x - 12$ 所得餘式為 $4x - 4$ ，下列選項何者一定為真？

- (1) $f(x)$ 的各項係數和為 4
- (2) $(x + 4)f(x)$ 除以 $x - 4$ 的餘式為 96
- (3) $f(x)$ 除以 $x + 3$ 的餘式為 -16
- (4) $f(x)$ 除以 $(x - 1)^2$ 的餘式為 -4
- (5) $f(x)$ 除以 $x^2 + 2x - 3$ 的餘式為 $3x - 7$

4. 設 a, b, c 為實數，若 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解為 $x > 3$ 或 $x < -2$ ，則下列何者正確？

- (1) $a < 0$
- (2) $a + b + c = 6$
- (3) $ax^2 - bx + c > 0$ 的解為 $-3 < x < 2$
- (4) 滿足不等式 $(ax + b)(ax + c) < 0$ 的整數解有 6 個
- (5) $x(ax^2 + bx + c) \leq 0$ 的解為 $x \leq -2$ 或 $0 \leq x \leq 3$

5. 多項式 $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 29x^2 - 17x + 10 = a(x - 2)^4 + b(x - 2)^3 + c(x - 2)^2 + d(x - 2) + e$ ，其中 a, b, c, d, e 為常數。請選出正確的選項。

- (1) $c = 3$
- (2) 若 $x \geq 2$ ，則 $f(x)$ 的最小值為 12
- (3) $f(x)$ 除以 $(x - 2)^2$ 的餘式為 $3x + 6$
- (4) $f(2 + \sqrt{3}) = 78 + 27\sqrt{3}$

(5) 已知 $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{17}}{4} \approx 1.9990$ ，則 $f\left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{17}}{4}\right)$ 之值四捨五入到小數後第三位為 11.997

6. 已知 m 、 n 為實數，右圖為三次函數 $f(x) = x^3 + mx^2 + 6x + n$ 的圖形， $(-2, 0)$ 為其對稱中心。請選出正確的選項。

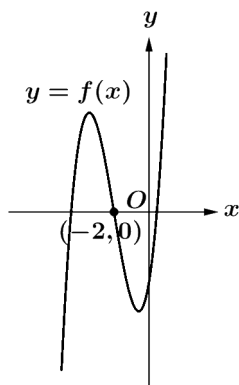
(1) $m = -6$

(2) $n = -4$

(3) $f(10^{10})$ 為 31 位數

(4) 若 $g(x)$ 為 $f(x)$ 在 $x = -100$ 附近的一次近似函數，則直線 $y = g(x)$ 的斜率為負

(5) $y = x^3 + 3x^2 + 6x - 5$ 的圖形可由 $y = f(x)$ 的圖形經適當平移得到



三、填充題（占 60 分）

說明：第 7 題至第 15 題，每小題 6 分。

7. 設 a ， b 為實數，已知 $(x^2 + ax + 1)(x^2 - x + b)$ 乘開後 x^3 項係數為 3， x 項係數為 -5 ，則數對 $(a, b) = (\underline{7-1}, \underline{7-2} \underline{7-3})$ 。

8. 師大附中 第 86 屆畢業生為西元 2023 年入學，2026 年畢業，班號 1608~1632。畢聯會小附 建立一個一次函數 $f(x)$ ，打算在畢業戰袍正面印上 $f(2023) - f(2026) = 86$ ，背面印上 $f(1632) - f(1608) = \underline{\text{秘}}$ ，則 秘 之值應為 8-1 8-2 8-3 8-4。

9. 若 $f(x) = 16x^6 - 26x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 22x^2 + 13x - 1$ ，則 $f(\log_{10} \sqrt{10}) = \underline{9-1} \underline{9-2}$ 。

10. 經濟學中的需求法則 (Law of demand) 指的是價格與需求量呈反向變動。也就是說，在其他條件不變的情況下，價格上漲時，需求量減少；價格下跌時，需求量增加。藍天高中 學生會預計在校慶推出限量版制服娃娃，每人限購一對。從過去經驗得知：當每對娃娃定價 500 元時，會有 330 人購買，而定價每提高 10 元，會少 5 人購買；定價每降低 10 元，會多 5 人購買。

(1) 若學生會希望收入最高，每對娃娃應定價 10-1 10-2 10-3 元。

(2) 若限制定價必須在 500 元到 700 元之間 (含 500 元與 700 元)，則收入的最小值為 10-4 10-5 10-6 千元。

11. 已知當 $P(m, n)$ 在 $f(x) = 2x^2 - 12x + 7$ 的圖形上時， $Q(m - 2, n + 7)$ 必在 $g(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形上，則序組 $(a, b, c) = (\underline{11-1}, \underline{11-2} \underline{11-3}, \underline{11-4} \underline{11-5})$ 。

12. 設 k 為實數， $f(x) = kx^2 + 2k(1 - k)x + 4k$ ，若不等式 $f(x) < 0$ 沒有實數解，則 $k^2 - 8k + 19$ 的最小值為 12-1。

13. 已知 k 為實數，二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 。若 $f(x) < 0$ 的解為 $k - 1 < x < 3k + 3$ ； $f(x) > 8$ 的解為 $x > 5k - 4$ 或 $x < 2k - 9$ ，則 $\frac{b}{a} = \underline{13-1} \underline{13-2} \underline{13-3}$ 。

14. 設 a, b, c 皆為正整數且 $a > b > c$ ，多項式 $f(x) = x(x - a)(x - b) - 13$ ，已知 $x - c$ 為 $f(x)$ 的因式，則三次函數 $f(x)$ 在 $x = 0$ 附近的一次近似函數

$g(x) = \underline{14-1} \underline{14-2} x - \underline{14-3} \underline{14-4}$ 。

15. 密碼學中的秘密共享 (Secret Sharing) 是用數學原理將秘密拆分成 n 個不同的 share，只要湊齊其中 k 個 share ($k < n$) 就可以還原秘密，少於 k 個 share 就無法還原秘密，如此可避免秘密集中於一人的風險，此技術可用於核彈發射密碼或金庫管控。以色列 密碼學家 Shamir 提出 Secret Sharing 是將密碼藏在 $(k - 1)$ 次多項式函數的常數項，在函數圖形上找 n 個點作為 share，每個人都只知道函數圖形上的一個點，沒有人知道真正的密碼，但只要 n 個人中有 k 個人合作就可以解開密碼。具有資訊安全專長的王 媽媽將家中金庫的密碼 d 藏在多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的常數項中，並分享給五個小孩每人一個函數圖形上的點作為各自的 share。已知老大拿到 $(13, 0)$ ；老二拿到 $(25, 0)$ ；老三拿到 $(15, 200)$ ；老四拿到 $(26, -273)$ ；老五拿到 $(2024, -8116357791)$ 。若干年後，王 媽媽失智了，迷糊的老五也把他那份 share 弄丟了，請你利用剩下四人的 share，計算金庫的密碼

$d = \underline{15-1} \underline{15-2} \underline{15-3} \underline{15-4}$ 。

參考答案

1. 5 2. 3

3. 235 4. 13 5. 235 6. 23

7. $(4, -1)$

8. -688

9. -4

10. (1) 580 ; (2) 161

11. $(2, -4, -2)$

12. 4

13. -22

14. $28x - 13$

15. 1625