

桃園市武陵高中 112 上高二第一次期中考

第壹部分：選擇（填）題（占 72 分）

一、多選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 8 分。(8-5-2-0)

1. 下列哪些選項中的值大於 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ？

(1) $\sin 1$

(2) $2 \sin 1 \cos 1$

(3) $1 - 2 \cos^2 1$

(4) $\frac{2 \tan 1}{\tan^2 1 - 1}$

(5) $\sqrt{\frac{1 - \cos 1}{2}}$

2. 透過下列哪些方式可以得到 $y = f(x) = 3 \sin(\pi x - 1) + 2$ 的圖形

(1) 將 $y = 3 \sin \pi x$ 的圖形向右平移 1 單位，再向上平移 2 單位

(2) 將 $y = 3 \sin \pi x$ 的圖形向右平移 $\frac{1}{\pi}$ 單位，再向上平移 2 單位

(3) 將 $y = 3 \sin x + 2$ 的圖形向右平移 1 單位，再水平伸縮為原來的 π 倍

(4) 將 $y = \sin(x - 1) + 2$ 的圖形水平伸縮為原來的 $\frac{1}{\pi}$ 倍，再鉛直伸縮為原來的 3 倍

(5) 將 $y = 3 \sin(x - 1)$ 的圖形水平伸縮為原來的 $\frac{1}{\pi}$ 倍，再向上平移 2 單位

3. 設廣義角 θ 滿足 $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ 且 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ ，則下列關於函數 $f(x) = \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\theta}{2}\right) - \sin x + 2\sqrt{2} \cos x$ 的敘述哪些正確？

(1) $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

(2) $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $f(x)$ 可化簡成 $f(x) = \sqrt{12} \sin(x + \varphi)$ ，其中： $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ 、 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) $f(x)$ 的最大值為 $\sqrt{12}$

(5) $y = f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}(\pi - \theta)$ 時有最大值

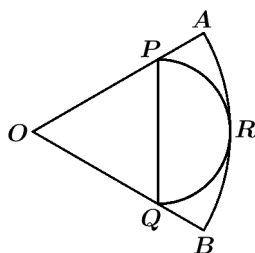
二、填充題（占 48 分）

說明：第 4 題至第 10 題，每格 6 分。

4. 計算並化簡 $\sin^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 將邊長為 10 的正方形軟鐵絲重新塑形成一個圓心角為 θ 徑的扇形，則當 $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 時，此扇形的面積會有最大值 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 如圖，在一半徑為 2 且圓心角為 $\frac{\pi}{3}$ 徑的扇形 OAB 中，放入一個以 $\overline{PQ}$ 為直徑的半圓，若 P 、 Q 分別在 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 上滿足 $\overline{OP} = \overline{OQ}$ 且 AB 弧與 PQ 弧相切於 R 點，則該半圓的直徑 $\overline{PQ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



7. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{AC} = 4$ 、 $\angle A = \frac{3}{4}\pi$ 徑，若 D 為 $\overline{AB}$ 中點，則 $\tan \angle BCD =$ 【 】。

8. 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 的範圍內，方程式 $\tan 3x + x = 0$ 的相異實數解有【 】個。

9. 設 $\pi \leq x \leq 2\pi$ ，不等式 $\sin x + \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解為【 】。

10. 設 $\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$ ，函數 $f(x) = (\sqrt{3} \cos x - \sin x)^2 + 2(\sqrt{3} \cos x - \sin x) - 5$ 的最大值為 M 且最小值為 m ，求 $M - m =$ 【 】。

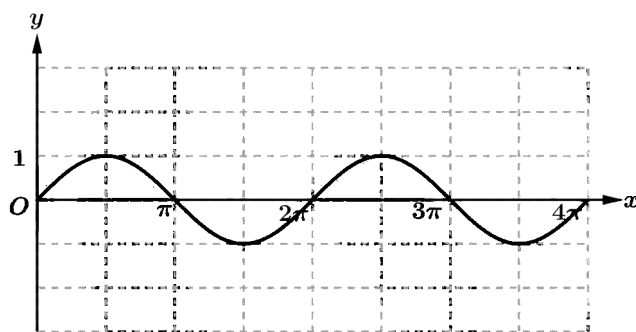
第貳部分：混合題（占 28 分）

說明：本部分共有 2 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

11 — 12 題組

附圖為 $y = \sin x$ 在 $x \in [0, 4\pi]$ 的圖形，設函數 $y = f(x) = 2 \sin 2x + 1$ ，則：

11. 利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出 $y = f(x)$ 在 $x \in [0, 4\pi]$ 的圖形，並說明其平移與伸縮的過程。並標示任兩個相鄰波峰 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 的位置及其坐標。（非選擇題，6 分）



12. 已知 $y = f(x)$ 與直線 $x = x_1$ 、 $x = x_2$ 、 $y = 4$ 在第一象限所圍成的面積為 a ，在 $x \in [0, 4\pi]$ 範圍內，求 $y = f(x)$ 與 $y = 0$ 在第四象限所圍成的面積總和。(以 a 表示) (非選擇題，6 分)

13 - 15 題組

這次教室佈置同學討論出「電玩世界」的構想，希望以《小精靈》作為主角設計。眾所周知，小精靈只要吃到迷宮角落的能量球，便能短暫獲得力量，反過來吃掉迷宮中的章魚鬼魂。如圖，小精靈是由一個圓心為 O_1 、半徑為 R 的圓，被挖去了一塊扇形後所剩餘的部分，該扇形的圓心角為 $\angle PO_1Q = \theta$ ($0 < \theta < \pi$)；而能量球的圓心為 O_2 、半徑為 r ($r < R$)。小瑜 負責繪製一個「小精靈 正要吃下能量球」的圖案(即缺口處的 $\overline{O_1P}$ 、 $\overline{O_1Q}$ 與能量球相切)，學藝股長請小瑜 將圖案塞滿虛線矩形 $ABCD$ 的框框(其中：邊長 $\overline{AD} = 25$ 、 $\overline{AD} \parallel \overline{O_1O_2}$)，這讓她為了圖案大小、角度與長度的設計苦惱許久，希望同學們能透過數學運算幫助她。

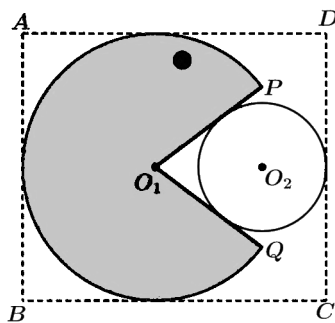
13. 請依據題意選出正確的算式。(單選題，4 分)

(1) $R + r + r \times \sin \theta = 25$

(2) $R + r + r + \sin \theta = 25$

(3) $R + r + r \times \sin \frac{\theta}{2} = 25$

(4) $R + r + r \div \sin \frac{\theta}{2} = 25$



14. 若小瑜 希望缺口的扇形為圓的六分之一，則當能量球半徑 $r =$ 【 】時，能使小精靈的圖案面積為能量球的 5 倍。(填充題，6 分)

15. 若小瑜 希望缺口的圓心角 θ 滿足 $\cos \theta = \frac{7}{25}$ ，且半徑比 $R : r = 3 : 2$ ，則此時兩個半徑 R 、 r 的值為多少？(非選擇題，6 分)

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 24 2. 25 3. 25

4. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 2 ; 100

6. $2\sqrt{3} - 2$

7. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

8. 7

9. $\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{12}$

10. 1

第貳部分：混合題

11. 略

12. $12\pi - 4a$

13. 4

14. $25 - \frac{25\sqrt{6}}{3}$

15. $(R, r) = (9, 6)$