

台北市師大附中 112 上高二期末考

第壹部分：選擇（填）題（占 80 分）

一、多選題（占 48 分）

說明：第 1 題至第 8 題，每題 6 分。(6-3-0)

1. 若將正多邊形的邊或對角線賦予方向，則正確的選項有哪些？

- (1) 利用正方形的對角線，可決定 4 個不同的向量
- (2) 利用正方形的邊，可決定 8 個不同的向量
- (3) 利用正五邊形的對角線，可決定 10 個不同的向量
- (4) 利用正五邊形的邊，可決定 10 個不同的向量
- (5) 利用正六邊形的 9 條對角線，可決定 18 個不同的向量

2. 若 $\vec{v}$ 為直線 L 上相異兩點所構成的向量，則稱為 $\vec{v}$ 直線 L 的方向向量。已知形如

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ 的圖形為一直線 } L, \text{ 試選出正確的選項。}$$

- (1) 點 $P(2, 1) \in$ 直線 L
- (2) 點 $Q(3, 4) \in$ 直線 L
- (3) 可以取直線 L 的方向向量 $\vec{v} = (3, 4)$
- (4) 可以取直線 L 的法向量 $\vec{n} = (-4, 3)$
- (5) 直線 L 的方程式可以整理為 $4x - 3y = 0$

3. 坐標平面上，已知點 $O(0, 0), P(6, 0)$ ，已知 $|\vec{OQ}| : |\vec{QP}| = 1 : 2$ 的圖形為圓，則 Q 點的坐標可能為何？

- (1) $(-6, 0)$
- (2) $(2, 0)$
- (3) $(4, 0)$
- (4) $(12, 0)$
- (5) $(-2, -4)$

4. 設聯立方程組 $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$ 有唯一解 (x_0, y_0) ，若 $a = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$ 、 $\beta = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$ 、

$\gamma = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$ ，請善用克拉瑪公式 (Cramer's rule)，選出正確的選項。

(1) $(x_0, y_0) = \left(\frac{\beta}{a}, \frac{\gamma}{a}\right)$

(2) 聯立方程組 $\begin{cases} bx + ay + c = 0 \\ ex + dy + f = 0 \end{cases}$ 恰有一組解 (x_0, y_0)

(3) 聯立方程組 $\begin{cases} 2ax + 3by + c = 0 \\ 2dx + 3ey + f = 0 \end{cases}$ 恰有一組解 $(2x_0, 3y_0)$

(4) 聯立方程組 $\begin{cases} cx + by = a \\ fx + ey = d \end{cases}$ 可能無解

(5) 聯立方程組 $\begin{cases} ax + cy = b \\ dx + fy = e \end{cases}$ 可能有無限多組解

5. 已知平面上三點 $P(0, 6)$ 、 $Q(-4, -2)$ 、 $R(10, 2)$ ，若點 S 恰與 P 、 Q 、 R 構成一個平行四邊形，則點 S 的坐標可能為何？

(1) $(0, 0)$

(2) $(6, -6)$

(3) $(-14, 2)$

(4) $(2, 2)$

(5) $(14, 10)$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，若規定 $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ 、 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ ，試選出正確的選項。

(1) $|\vec{a} + \vec{c}| > |\vec{b}|$

(2) $|\vec{a} - \vec{c}| < |\vec{b}|$

(3) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

(4) 若 $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{a} - \vec{c}|$ ，

(5) 若 $\vec{a} + \vec{c}$ 恰巧可平分 $\angle B$ 的外角，則 $\triangle ABC$ 為正三角形

7. 坐標平面上，已知 $A(2, 1)$ 、 $B(-4, -7)$ 、 $C(10, -5)$ ，試選出正確的選項。

(1) $\triangle ABC$ 為等腰三角形

(2) 若 $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$ ，則 D 點的坐標為 $\left(\frac{8}{3}, -\frac{11}{3}\right)$

(3) 若點 G 為 $\triangle ABC$ 的重心， $|\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}| = |\overrightarrow{GC}|$

(4) 若點 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則 O 點的坐標為 $(2, 1)$

(5) 若點 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則 H 點的坐標為 $(3, -6)$

8. 若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 皆非零向量，試選出恆成立的選項。

(1) 若 $\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ，則 $\vec{a} = \vec{c}$

(2) 若 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ，則 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{c} = \vec{0}$

(3) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a}$

(4) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$

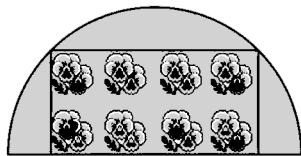
(5) $\vec{a}$ 在 $\vec{c}$ 上的正射影 = $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 上的正射影

二、填充題（占 35 分）

說明：第 9 題至第 15 題，每格 5 分。

9. 計算二階行列式的值： $\begin{vmatrix} 1582 & 1607 \\ 108 & 113 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 為迎接 2024 師大附中 77 週年校慶，班聯會擬在至善樓與中正樓的大草坪上，規劃一直徑為 20 公尺的半圓形區域，並在其內圍出一個矩形花園。若花園有一邊排在直徑上(如圖)，試根據下列條件推算：

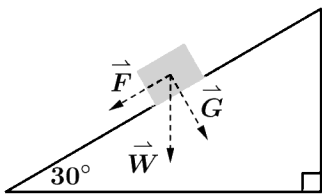


(1) 算幾不等式：當花園的面積 = $\frac{10-1}{10-2} \cdot \frac{10-3}{10-4}$ 平方公尺為最大時，

其周長 = $\frac{10-4}{10-5} \sqrt{10-6}$ 公尺。

(2) 柯西不等式 (Cauchy inequality)：當花園的周長 = $\frac{10-7}{10-8} \sqrt{10-9}$ 公尺最大時，其面積 = $\frac{10-10}{10-11}$ 平方公尺。

11. 在自然科學探究與實作課程的斜面運動的實驗中，潘老師將斜面裝置固定在水平地面 (x 軸) 上(如圖)。已知斜面的坡度仰角為 30° ，今在其上放置一個 20kg 重的物體，設其所受的重力為 $\vec{W} = (0, -20)$ 。若不計物體與斜面之間摩擦力，試回答下列問題：



(1) 物體的重力 $\vec{W}$ 在與斜面坡度平行方向上的分量 $\vec{F} = \left(\frac{11-1}{11-2} \sqrt{11-3}, \frac{11-4}{11-5} \right)$ 。

(2) 物理垂直壓在斜面的重量 $|\vec{G}|$ 約為 $\frac{11-6}{11-7}$ 公斤重。

(四捨五入到整數位)

第貳部分：混合題 (占 17 分)

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液 (帶)。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12 — 14 題組

在 $\triangle OAB$ 中，已知點 $O(0,0)$ 、 $A(7,24)$ 、 $B(3,-4)$ ，試回答下列問題。

12. $\triangle OAB$ 的面積 = $\frac{12-1}{12-2}$ (選填題，6 分)

13. $\angle O$ 的平分線方程式： $y = \frac{(13-1)}{(13-2)(13-3)}x$ (選填題，6分)

14. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \underline{(14-1)(14-2)(14-3)}$ (選填題，5分)

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 134 2. 134 3. 125 4. 24

5. 235 6. 34 7. 123 8. 4

9. 5210

10. (1) $100, 30\sqrt{2}$; (2) $20\sqrt{5}, 80$

11. (1) $(-5\sqrt{3}, -5)$; (2) 17

第貳部分：混合題

12. 50

13. $\frac{2}{11}$

14. -75