

市立臺中一中 112 學年度第二學期 期末考 高二數學 A 試題

未正確劃記班級、姓名、座號於答案卡者，一律扣 10 分!!

一、多重選擇題：(每題 9 分，共 45 分，答錯一個選項得 7 分，錯兩個得 5 分，錯三個得 3 分，錯四個得 1 分，其餘情形得 0 分)

1. 設兩矩陣 B, C 滿足 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} + 2B = C$ ，已知矩陣 C 中各元的和為 100，

下列哪些選項可能是矩陣 B ？

(1) $\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 \end{bmatrix}$ 。

2. 已知 A 為二階方陣、 I 為二階單位方陣，且矩陣 X 滿足 $AX = X + A$ 。請選出正確的選項。

(1) X 為 2×1 的矩陣 (2) X 為 2×2 的矩陣 (3) 符合條件的矩陣 X 可能有無窮多個

(4) 若 $A \neq I$ ，則 $X = (A - I)^{-1} A$ (5) 若 $\det(A) \neq 1$ ，則 $X = (A - I)^{-1} A$ 。

3. 設 A, B, C 皆為二階方陣，其反方陣依序為 A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} 。已知 $ABC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，請選出正確的選項。

(1) $CAB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $C = A^{-1}B^{-1}$ (3) $B = (CA)^{-1}$ (4) $A^{-1}(B + C)^2 A = A^{-1}B^2 A + A^{-1}C^2 A$

(5) $(A^{-1}BCA)^2 = (A^{-1}B^2 A)(A^{-1}C^2 A)$ 。

4. 設矩形 $OABC$ 的四頂點坐標為 $O(0, 0)$ 、 $A(3, 0)$ 、 $B(3, 2)$ 、 $C(0, 2)$ ，將此四頂點分別沿 x 軸推移 y 坐標的 2 倍後得到四邊形 $OA_1B_1C_1$ ，再將四邊形 $OA_1B_1C_1$ 對直線 $y = 3x$ 鏡射得到四邊形 $OA_2B_2C_2$ 。若矩形 $OABC$ 變換到四邊形 $OA_1B_1C_1$ 的線性變換矩陣為 P ，而四邊形 $OA_1B_1C_1$ 變換到 $OA_2B_2C_2$ 的線性變換矩陣為 Q ，請選出正確敘述的選項。

(1) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $Q = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ (3) 若 R 表示由矩形 $OABC$ 變換到 $OA_2B_2C_2$ 的矩陣，則 $R = PQ$

(4) 矩形 $OABC$ 面積 = 四邊形 $OA_1B_1C_1$ 面積 = 四邊形 $OA_2B_2C_2$ 面積

(5) 四邊形 $OA_2B_2C_2$ 對角線 $\overline{A_2C_2}$ 所在的直線方程式 $11x - 2y + 30 = 0$ 。

5. 設 O 為坐標平面上的原點且 M 為二階方陣。已知點 $A(2, 0)$ 經 M 作線性變換後得點 $P(4, 0)$ ，點 $B(0, 2)$ 經 M 作線性變換後得點 $Q(4, 6)$ ，請選出正確的選項：

(1) $\triangle OAB$ 的外心為 $(1, 1)$ (2) 若 C 為 $\overline{AB}$ 上一點，則 C 點經 M 作線性變換後所得的點必在 $\overline{PQ}$ 上

(3) $\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2$ (4) $M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(5) 設 P, Q 兩點經 M 作線性變換後依序得 R, S 兩點，則 $\triangle ORS$ 的面積為 72。

二、填充題：(每格 5 分，共 45 分)

A. 已知方陣 A 滿足 $A \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 且 $A \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ，則 $2A$ 的行列式值為 ⑥⑦。

B. 設 $A = \begin{bmatrix} p & q \\ \frac{1}{3} & r \end{bmatrix}$ 為轉移矩陣且滿足 $A \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，則 $p \times q \times r = \frac{\textcircled{8}}{\textcircled{9}\textcircled{10}}$ 。(化成最簡分數)

C. 某校學生目前使用手機有 iOS 或 Android 兩系統，根據過去資料顯示：每年使用 iOS 系統有 20% 的學生改至 Android 系統，使用 Android 系統有 30% 的學生改至 iOS 系統，其餘皆維持不變。已知目前使用 iOS 與 Android 的人數比率分別為 40 % 與 60 %，若經過 2 年後，使用 iOS 與 Android 人數的比值為 R ，經過多年後呈現穩定狀態時使用 iOS 與 Android 人數的比值為 r ，則數對 $(R, r) = \left(\frac{\textcircled{11}\textcircled{12}}{\textcircled{13}}, \frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}} \right)$ 。(化成最簡分數)

D. 設 a, b 皆為實數，已知矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ a & a & 4 & -1 \end{bmatrix}$ 經若干次列運算後可化為 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ ，

則序對 $(a, b, c) = \underline{(\textcircled{16}, \textcircled{17}, \textcircled{18}\textcircled{19})}$ 。

E. 已知二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} a & p & a+p \\ b & q & b+q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & r & 13 \\ -14 & 18 & s \end{bmatrix}$ ，則數對 $(r, s) = \underline{(\textcircled{20}, \textcircled{21})}$ 。

F. 已知 x, y, z 的方程組 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 無解，則 $a = \underline{\textcircled{22}\textcircled{23}}$ 。

I. 設 $A = [a_{ij}]_{10 \times 10}$ 滿足 $a_{ij} = \begin{cases} i-j, & i \geq j \\ j-i, & i < j \end{cases}$ ，則矩陣 A 的所有元素總和為 ②④②⑤②⑥。

(已知 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

H. 袋中有編號分別為 1、2、4、8、16 的球共五顆，每次從袋中取一球，記錄其號碼後放回袋中。
設取球 n 次後，其 n 次號碼乘積為完全平方數的機率為 P_n 。已知對所有正整數 n ， $P_{n+1} = rP_n + s$ 恆成立，
則數對 $(r, s) = \left(\frac{②⑦}{②⑧}, \frac{②⑨}{③⑦} \right)$ 。(化成最簡分數)

G. 給定兩二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2\cos\theta \end{bmatrix}$ (其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)、 $B = \begin{bmatrix} 8 & 8\sqrt{3} \\ 8\sqrt{3} & -8 \end{bmatrix}$ 。設 n 為正整數，
且 $A^n = B^2$ ，則數對 $(n, \theta) = \left(③①, \frac{\pi}{③②} \right)$ 。(化成最簡分數)

三、混合題：(共 10 分)

欣梅爾與芙莉蓮兩人瞞著父母偷偷交往，為了避免訊息被家人看到，兩人之間約定好將語言編碼後再傳送。編碼規

則如下：若欲傳送的文字為「I LOVE YOU」，則依英文字母序號(如下表)寫成矩陣 $\begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 & 22 \\ 5 & 25 & 15 & 21 \end{bmatrix}$ 。

字母	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
序號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
字母	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
序號	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

再透過線性變換矩陣 $T \cdot \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 & 22 \\ 5 & 25 & 15 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -13 & 0 & 1 \\ 17 & -14 & 15 & 24 \end{bmatrix}$ ，其中 T 是一個 2×2 方陣，編碼成新的密碼矩陣

$\begin{bmatrix} 4 & -13 & 0 & 1 \\ 17 & -14 & 15 & 24 \end{bmatrix}$ 後再傳送。試問：

① 矩陣 $T = \begin{bmatrix} ③③ & ③④③⑤ \\ ③⑥ & ③⑦③⑧ \end{bmatrix}$ 。(選填題，5 分)

② 若在某天芙莉蓮收到欣梅爾傳來的密碼矩陣為 $\begin{bmatrix} 14 & 9 & -5 & 13 \\ 49 & 36 & 3 & 51 \end{bmatrix}$ ，則她可以將此密碼解密還原得知欣梅爾欲傳送的
文字為下列哪個選項？ (1) LOVEUTOO (2) URPRETTY (3) UARESEXY
(4) URMYGIRL (5) UMARRYME。(單選題，題號 ③⑨，5 分)

試題結束

市立臺中一中 112 學年度第二學期 期末考 高二數學 A 簡答

一、多重選擇題：1. (3)(4) 2. (2) 3. (1)(3) 4. (4)(5) 5. (1)(2)(5)

二、填充題：A. 36 B. $\frac{5}{54}$ C. $\left(\frac{11}{9}, \frac{3}{2}\right)$ D. $(7, 3, -2)$ E. $(6, 4)$ F. -4 G. 330

H. $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ I. $\left(8, \frac{\pi}{4}\right)$

三、混合題：① $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ② (4)