

台中市文華高中 112 下高二期末考

一、是非題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 10 題，每題 2 分。

題組(一)：建銘所經營的畜牧場養雞 2000 隻，其中 20% 患禽流感；鴨 3000 隻，其中 10% 患禽流感。今有一試劑對健康的雞、鴨能做出正確檢驗的機率均為 0.9，對患禽流感的雞、鴨能做出正確檢驗的機率均為 0.95，則在此畜牧場中，試判斷下列 1 到 5 題是否正確。

1. 檢查出患禽流感的雞有 540 隻。
2. 真正患有禽流感的雞、鴨共有 700 隻。
3. 檢查出患有禽流感的雞、鴨共有 1095 隻。
4. 檢查出患禽流感的雞中，確實患禽流感的雞機率為 $\frac{19}{27}$ 。
5. 檢查出患禽流感的雞的機率大於鴨的機率。

題組(二)：設 A 、 B 、 C 都是二階方陣且其乘法反方陣均存在， I 為二階乘法單位方陣，試判斷下列 6 到 10 題是否正確。

6. 若 $A^2 = I$ ，則 $A = I$ 或 $-I$ 。
7. 若 $AB = AC$ ，則 $B = C$ 。
8. $(AB)^2 = A^2B^2$ 。
9. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 。
10. $ABA^{-1} = B$ 。

二、單選題（占 10 分）

說明：第 11 題至第 12 題，每題 5 分。

11. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ ， A^{-1} 存在且 $\det A = 4$ ，則 $\det (A - A^{-1})$ 之值為下列何者？

(1) 4

(2) 5

(3) $\frac{25}{16}$

(4) $\frac{25}{4}$

(5) 16

12. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 所表示的線性變換是將直線 $L : 4x + 3y = 3$ 變換至直線 L' ，則兩直線 L 與 L' 的交點坐標為下列何者？

(1) $(0, 1)$

(2) $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

(3) $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$

(4) $\left(-4, \frac{7}{3}\right)$

(5) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

三、多選題（占 21 分）

說明：第 13 題至第 15 題，每題 7 分。(7-4-1-0)

13. 設 k 為實數且三元一次方程組
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 2z = -1 \\ 3x + 2y + k^2z = 1 \end{cases}$$
 無解，則 k 可為下列何值？

- (1) -1
- (2) 0
- (3) 1
- (4) 2
- (5) 3

14. 設 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 若 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, 且 $A \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 則下列哪些選項是正確的？

- (1) $a + b + c - d = 0$
- (2) A^{-1} 不存在
- (3) A 可能是鏡射矩陣
- (4) A 可能是 I
- (5) 若 $a^2 + b^2 = 1$, 則任一三角形經 A 的線性變換後, 面積不變

15. 坐標平面上, 設 A 、 B 分別表示以原點為中心, 順時針、逆時針旋轉 90° 的旋轉矩陣。設 C 、 D 分別表示以直線 $x = y$ 、 $x = -y$ 為鏡射軸的鏡射矩陣。則下列哪些選項是正確的？

- (1) A 、 C 將點 $(1, 0)$ 映射到同一點
- (2) $A = -B$
- (3) $C = D^{-1}$
- (4) $AB = CD$
- (5) $AC = BD$

四、填充題（占 45 分）

說明：第 6 題至第 14 題，每題 5 分。

16. 已知矩陣 $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ 、 $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 、 $W = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，且 $2W + U = 2U - 3V$ ，則 $a + b + c + d =$ **【 】**。

17. 若二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2^x + 4\sqrt{2} & 14 \\ 2^x & 2^x - 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣不存在，
則 $x =$ **【 】**。

18. 若矩陣 $\begin{bmatrix} 3 & 4 & b & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & a & 4 & 7 \end{bmatrix}$ 經列運算後可得 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -18 & -36 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & c \end{bmatrix}$ ，
則序組 $(a, b, c) =$ **【 】**。

19. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 、 $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 、 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $XA^{-1} = 3I + X$ ，
則 $a + b + c + d =$ **【 】**。

20. 設 a, b 為實數，若 A 為二階鏡射方陣， I 為二階乘法單位方陣，
且 $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10} = aI + bA$ ，則數對 $(a, b) =$ **【 】**。

21. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $(I + A)^3 = I + mA$ ， $m \in \mathbb{R}$ ，則 $m =$ **【 】**。

22. 設二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \langle ? \rangle \end{bmatrix}$ ， $A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，若 $A \begin{bmatrix} \langle ? \rangle \\ \langle ? \rangle \end{bmatrix}$

23. 坐標平面上，點 $P(a, b)$ 對直線 $x - \sqrt{3}y = 0$ 作鏡射後，再沿 x 軸推移 y 坐標 3 倍得新坐標 $Q(4, 0)$ ，則點 $P(a, b) =$ **【 】**。

24. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ，則滿足 $A^{24} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 的 θ 中，最大的銳角為【 】度。

5

參考答案

1. ○ 2. ○ 3. ○ 4. ○ 5. ○

6. × 7. ○ 8. × 9. ○ 10. ×

11. 4 12. 1

13. 13 14. 145 15. 25

16. -7

17. 4

18. $(-3, -1, 4)$

19. -3

20. $(5, 5)$

21. 7

22. -1

23. $(2, 2\sqrt{3})$

24. 80

6