

台南市台南女中 112 下高二期末考

一、是非題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 10 題，每題 2 分。（正確劃記 1，錯誤劃記 2）

1. $\left\langle \tan\left(n + \frac{\pi}{6}\right) \right\rangle$ 是收斂數列。

2. $\left\langle \cos\left(n + \frac{\pi}{6}\right) \right\rangle$ 是收斂數列。

3. $A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ 是轉移矩陣。

4. 設 n 為正整數， $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$ ，則對任意 x_1 和 y_1 ， $\langle x_n + y_n \rangle$ 必定是收斂數列。

5. 設 $A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ ，可以找到正整數 n ，使 $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

6. 設 $A = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ ，可以找到正整數 n ，使 $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

7. 設實數數列 $\langle a_n \rangle$ 和 $\langle b_n \rangle$ 滿足從某一項起， $0 \leq a_n \leq b_n$ 皆成立，且 $\langle b_n \rangle$ 收斂，則 $\langle a_n \rangle$ 必定收斂。

8. 設實數數列 $\langle a_n \rangle$ 和 $\langle b_n \rangle$ 滿足從某一項起， $0 \leq a_n \leq b_n$ 皆成立，且 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收斂級數，則 $\langle a_n \rangle$ 必定收斂。

9. 設 $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ ， A 將點 P, Q, R 分別變換到 P', Q', R' ，則 A 也會將 $\triangle PQR$ 的外心 S 變換到 $\triangle P'Q'R'$ 的外心 S' 。

10. 設 $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ ， A 將點 P, Q, R 分別變換到 P', Q', R' ，則 A 也會將 $\triangle PQR$ 的重心 G 變換到 $\triangle P'Q'R'$ 的重心 G' 。

二、單選題（占 15 分）

說明：第 11 題至第 13 題，每題 5 分。

11. 設 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ， $b = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5$ ， $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ ， $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ ，

$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (0.\bar{9})^n$ ，則 a, b, c, d, e 的大小關係為下列何者？

(1) $e = b = a < c < d$

(2) $e < c < b = a < d$

(3) $e < b < c < d < a$

(4) $c < b = e < d < a$

(5) $e = c < b < a < d$

12. 坐標平面上，下面哪一個選項可將右邊的圖 A 變成圖 B ？

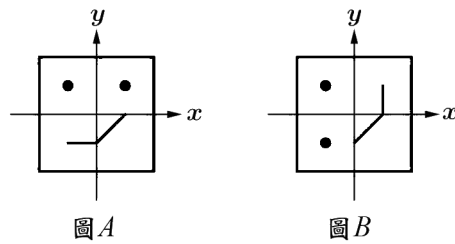
(1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$



13. 設 $A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ ， $P_1(1, 0)$ 。對所有正整數 n ， A 將點 $P_n(x_n, y_n)$ 變換到點 $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ ， a_n

表示 $\triangle OP_n P_{n+1}$ 的面積，關於無窮級數 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ，選出正確的敘述。

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 為發散級數

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{7}{12}$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{7}{4}$

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{7}{6}$

(5) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{7}{2}$

三、多選題（占 30 分）

說明：第 14 題至第 19 題，配分如下。

14. 下列哪些函數圖形上的所有點經過 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 變換後，和原來的圖形完全相同？

- (1) $y = x^2 + 3$
- (2) $y = x^3 + 3$
- (3) $y = x(x - 1)(x + 1)$
- (4) $y = \sin x$
- (5) $y = \tan x$

15. 設 $\langle a_n \rangle$ 為實數數列，且極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n^2 - 3}{a_n + 3}$ 存在。選出正確的敘述。

- (1) 若 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n^2 - 3}{a_n + 3}$ 之值可能為 2
- (2) 若 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n^2 - 3}{a_n + 3}$ 之值可能為 -1
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n^2 - 3}{a_n + 3}$ 之值可能為 3
- (4) $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 之值可能為 3

16. 設二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 3 & 5 & x \\ 4 & 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ ，選出正確的敘述。

- (1) A 的行列式值為 4
- (2) $y < 0$
- (3) $x^2 + y^2 > 3$
- (4) 若 $A^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ，則 $a < 8$
- (5) 若 $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$ ，若 $2a + b < 0$ ，則 $2a' + b' < 0$ 也必定成立

17. 設坐標平面上有一邊長為 1 的正方形 $ABCD$ ，且原點 O 恰為正方形 $ABCD$ 的中心，選出正確的敘述。

- (1) 可找到線性變換 T 將頂點 B 、 D 依序變換成頂點 D 、 A
- (2) 若線性變換 T 將頂點 B 變換成頂點 A ，且 $\det T \neq 0$ ，則 T^{-1} 必定將頂點 C 換成頂點 D
- (3) 對任意線性變換 T ，若 $\det T \neq 0$ ，且 T 將頂點 A 、 B 、 C 、 D 依序變換成頂點 A' 、 B' 、 C' 、 D' ，則 $\overline{A'B'}$ 必定平行 $\overline{C'D'}$
- (4) 對任意線性變換 T ，若 $\det T \neq 0$ ，且 T 將頂點 A 、 B 、 C 、 D 依序變換成頂點 A' 、 B' 、 C' 、 D' ，則必 $\overline{A'D'}$ 定垂直 $\overline{A'B'}$
- (5) 滿足正方形 $ABCD$ 經 T 變換後仍為正方形 $ABCD$ 的線性變換 T 恰有 6 個

18. 設 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為旋轉變換，且 A 將點 $(7, 1)$ 變換到點 (x, y) ， A^2 將點 $(7, 1)$ 變換到點 $(5, 5)$ ，

$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，選出正確的選項。

- (1) $AB = BA$
- (2) B 為鏡射矩陣
- (3) 符合條件的 A 恰有一個
- (4) $a = 3c$
- (5) $y^2 = 10$

19. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $P_1(300, 400)$ 。對所有正整數 n ， A 將點 $P_n(x_n, y_n)$ 變換到點 $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ ，選出正確的選項。

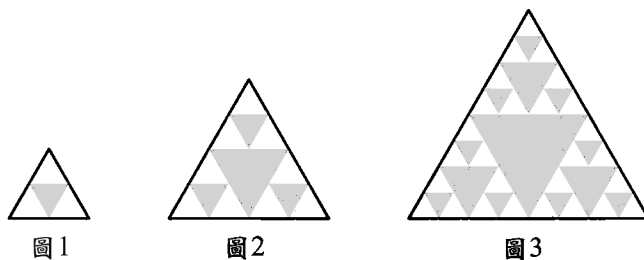
- (1) 對任意實數 $r \neq 0$ ，數列 $\langle x_n \rangle$ 皆發散
- (2) 對任意實數 $r \neq 0$ ，數列 $\langle 2^{x_n} \rangle$ 皆發散
- (3) 對任意實數 $r \neq 0$ ，設 a_n 為 $\overline{OP_n}$ 的斜率，則數列 $\langle a_n \rangle$ 必定收斂
- (4) 對任意實數 $r \neq 0$ ，設 $b_n = \overrightarrow{OP_n} \cdot (1, 2)$ ，則數列 $\langle b_n \rangle$ 必為等差數列
- (5) 對任意實數 $r \neq 0$ ，設 c_n 為點 P_n 到直線 $x + y = 0$ 的距離，則數列 $\langle c_n \rangle$ 必為等差數列

四、填充題（占 35 分）

說明：第 20 題至第 26 題，每題 5 分。

20. 有個認真的數學老師長期研究全班同學的成績，發現每次數學考試及格的人當中都只有 2 成的人下次不及格，但是不管他再怎麼努力教學，每次不及格的同學始終是及格人數的 2 倍。假設全班人數恆定，則這次考試不及格的同學中，「下下次」考試變成及格的比率是 $0.\overline{(20-1)(20-2)}$ 。

21. 觀察下列第 n 個圖中，最大正三角形內有 a_n 個白色正三角形，例如第一個圖中有 $a_1 = 3$ 個白色正三角形，依此規律下去。則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ 之值為 $\frac{(21-1)}{(21-2)}$ 。



22. 設線性變換 A 將點 $(2u+v, u-v)$ 變換到 (u, v) ， B 為對直線 $x+y=0$ 鏡射的線性變換，點 P 經過 A 變換、再經過 B 變換後成點 $(2, 3)$ ，則點 P 的坐標 $(\overline{(22-1)(22-2)}, \overline{(22-3)(22-4)})$ 。

23. 設 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n)}{1+3+3^2+3^3+\cdots+3^n}$ ， $b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(1+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\cdots+2^{-n})}{1+3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}+\cdots+3^{-n}}$ ，

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \cdots + \frac{2^n}{3^n} \right),$$

則序對 (a, b, c) 為 $(\overline{(23-1)}, \overline{(23-2)}, \overline{(23-3)})$ 。

24. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的每一項 a_n 都介於 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 和 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{7^k}$ 之間，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 之值為 $\frac{(24-1)}{(24-2)}$ 。

25. 設 A 為鏡射變換，且 A 將點 $(7, 1)$ 變換到點 $(5, 5)$ ，則 A 會將點 $(2, -4)$ 變換到點 $(\overline{(25-1)(25-2)}, \overline{(25-3)})$ 。

26. 坐標平面上， P 點在單位圓上。 P 點經 $\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換後變成 Q 點， Q 點再經過旋轉矩陣

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ 變換，又回到 } P \text{ 點，則 } c \text{ 之值為 } \frac{(26-1)(26-2)}{(26-3)(26-4)}。$$

参考答案

1. 2

2. 2

3. 2

4. 1

5. 1

6. 2

7. 2

8. 1

9. 2

10. 1

11. 4

12. 5

13. 2

14. 345

15. 123

16. 235

17. 23

18. 145

19. 134

20. 0.17

21. $\frac{3}{2}$

22. $(-8, -1)$

23. $(0, 4, 3)$

24. $\frac{1}{6}$

25. $(-2, 4)$

26. $\frac{-8}{17}$