

台中市文華高中 112 上高三第二次期中考

一、單選題（占 8 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 4 分。

1. 下列敘述何者正確？

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 連續，則 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在

(2) 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數。若 $f'(a) = 0$ 且 $f''(a) > 0$ ，則在 $x = a$ 有極大值

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ，則 $f(x)$ 在 $x = a$ 連續

(4) 三次實係數多項式函數的圖形必有極大值或極小值

(5) 三次實係數多項式函數的圖形也可能沒有反曲點

2. 試問當實數 k 為何選項時， $f(x) = 2x^3 - x$ 的圖形與 $g(x) = x^3 + 2x + k$ 的圖形交於三相異點？

(1) $-\sqrt{5}$

(2) $-\pi$

(3) $\sqrt{2}$

(4) π

(5) $\sqrt{15}$

二、多選題（占 20 分）

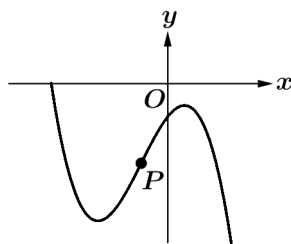
說明：第 3 題至第 6 題，每題 5 分。(5-3-1-0)

3. 已知多項式 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 3$ ，試選出正確的選項。

- (1) 函數 $y = f(x)$ 的圖形只有一個極值點
- (2) 函數 $y = f(x)$ 的圖形只有一個反曲點
- (3) 函數 $y = f(x)$ 的圖形在 $[-1, 0]$ 的區間沒有實根
- (4) 函數 $y = f(x)$ 的圖形在 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的區間凹口向上
- (5) 函數 $y = f(x)$ 的圖形沒有正根

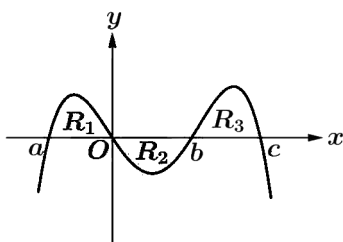
4. 右圖為三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形，其中 P 點違反曲點。試選出正確的選項

- (1) $a > 0$
- (2) $b > 0$
- (3) $c > 0$
- (4) $d > 0$
- (5) $b^2 - 3ac > 0$



5. 設多項式函數 $f(x)$ 之圖形如右， a, b, c 為 x 軸上三相異點， $a < 0 < b < c$ ，若 R_1, R_2, R_3 分別表示函數在閉區間 $[a, 0], [0, b], [b, c]$ 與 x 軸所圍成之區域面積，則下列哪些選項正確？

- (1) $\int_0^b f(x) dx = -R_2$
- (2) $\int_a^c f(x) dx = R_1 - R_2 + R_3$
- (3) $R_1 + R_2 + R_3 = \left| \int_0^c f(x) dx \right|$
- (4) $R_1 + R_2 + R_3 = \int_a^c |f(x)| dx$
- (5) $R_1 + R_2 + R_3 = \int_a^0 f(x) dx + \int_b^0 f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$



6. 設函數 $y = f(x) = x^3$ 的圖形與直線 $x = 0, x = 1$ 及 x 軸所圍成的區域為 R ，其面積為 a 。將閉區間 $[0, 1]$ 分成 n 等分，若旗下和為 L_n 、上和為 U_n ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) $L_{10} > U_{10}$
 (2) $L_{10} > L_{20}$
 (3) $U_{10} > U_{20}$
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = a$
 (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (L_n - U_n) = 0$

三、填充題（占 72 分）

說明：第 7 題至第 18 題，每題 6 分。

7. 已知 $f(x) = -x^3 + 8x^2 - 18x + 9$ ，則 $f(1.99) = \textcircled{7-1} \textcircled{7-2} \textcircled{7-3} \textcircled{7-4}$ 。（請四捨五入到小數點後第二位）

8. $\int_{-2023}^{2023} (3 \sin x + 4x^5 - x^3 + 2) dx = \textcircled{8-1} \textcircled{8-2} \textcircled{8-3} \textcircled{8-4}$ 。

9. 若 $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}$ ，則 $f'(0) = \frac{\textcircled{9-1} \textcircled{9-2}}{\textcircled{9-3} \textcircled{9-4} \textcircled{9-5}}$ 。

10. 設四次實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f'(1) = f'(-1) = f'(3) = 0$ ， $f'(0) = 12$ ，又 $f(0) = 6$ ，試求 $f(1) = \textcircled{10-1} \textcircled{10-2}$ 。

11. 設 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x-1} = \frac{\textcircled{11-1} \textcircled{11-2}}{\textcircled{11-3}}$ 。

12. 已知 $f(2) = 2$ ， $f'(2) = 2$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2} = \textcircled{12-1} \textcircled{12-2}$ 。

13. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax + 3 & , x \geq 1 \\ -x^2 + 2x + b & , x < 1 \end{cases}$ ，若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處可微分，

則 $a + b$ 之值為 $\textcircled{13-1} \textcircled{13-2}$ 。

14. 已知 $f(x) = (x^3 + x + 3)^{15}$ 除以 $(x+1)^2$ 之餘式為 $ax + b$ ，

求數對 $(a, b) = (\textcircled{14-1} \textcircled{14-2}, \textcircled{14-3} \textcircled{14-4})$ 。

15. 試求 $f(x) = 8x^3 + 12x^2 - 18x + 4$ 在區間 $[-2, 2]$ 中的最小值為 $\textcircled{15-1} \textcircled{15-2}$ 。

16. 已知通過點 $P(0, 2)$ 且與二次函數 $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ 相切的直線有兩條，其中斜率為負的直線方程式為 $y = ax + b$ ，試求 $a + b = \textcircled{16-1} \textcircled{16-2}$ 。

17. 已知三次多項式函數圖形 $y = f(x)$ 通過原點，且在反曲點 $(1, 1)$ 處有一水平切線，試求 $f(-1) = \textcircled{17-1} \textcircled{17-2}$ 。

18. 今欲設計一個長方體盒子，已知長、寬、高總和為 120 公分，且某兩邊長度比為 $2:3$ ，試求此長方體之最大體積為 $\textcircled{18-1} \textcircled{18-2} \textcircled{18-3} \textcircled{18-4} \textcircled{18-5}$ 立方公分。

参 考 答 案

1. 3

2. 145

3. 345

4. 12345

5. 25

6. 2

7. 2

8. $y = -x + 8$

9. -5

10. $(-3, 6, 0, 6)$

11. $\frac{2}{5}$

12. $\frac{8}{3}\pi$

13. 434

14. 14