

新竹市新竹高中 112 上高二期末考(文)

第壹部分：選擇(填)題(占 80 分)

一、多選題(占 28 分)

說明：第 1 題至第 4 題，每題 7 分。(7-4-1-0)

1. 試問下列哪些選項是正確的？

(1) 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$ ，則 $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} = 24$

(2) 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$ ，則 $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{vmatrix} = 16$

(3) 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$ ，則 $\begin{vmatrix} a - \sqrt{2}b & (1 + \sqrt{2})b - a \\ c - \sqrt{2}d & (1 + \sqrt{2})d - c \end{vmatrix} = 4$

(4) 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 1$ ， $\begin{vmatrix} a & b \\ u & v \end{vmatrix} = -3$ ，則 $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 3x + 5u & 3y + 5v \end{vmatrix} = 9$

(5) $\begin{vmatrix} a + kc & b + kd \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e + ka & f + kb \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c - e & d - f \end{vmatrix}$

2. 設 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為平面上兩個非零向量，試問下列哪些選項是正確的？

(1) 若 $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ ，則數對 $(x, y) = (0, 0)$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}| |\vec{b}| \geq 0$

(3) 若 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ ，則 $\vec{a} // \vec{b}$

(4) 若 $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

(5) 若 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影的長度等於 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的正射影的長度， $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

3. 設 $a, b \in \mathbb{R}$ ，下列有關 x, y 的二元一次聯立方程組 $\begin{cases} -2x + (a + 2)y = -2 \\ 6x + (a - 2)y = b - 2 \end{cases}$ 的敘述何者正確？

(1) 若 $a > 0$ ，則此方程組必定恰有一解

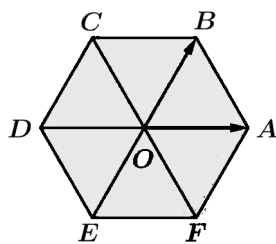
(2) 若 $a = -1$ ，則此方程組必定無解

(3) 若 $b \neq 8$ ，則此方程組必定無解

(4) 若 $b = 8$ ，則此方程組必定為無限多解

(5) 若 $ab = -8$ ，則此方程組必定有解

4. 如圖，坐標平面上正六邊形 $ABCDEF$ ，已知中心 O 為原點， $A(1, 0)$ ，若 P 在 $\triangle OAB$ 內(含邊界)，且 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ，其中 $x \geq y$ ，則



- (1) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}$
- (2) 所有 P 點所形成區域的面積 $\geq \frac{1}{4}$
- (3) $|\overrightarrow{OP}|^2 \geq 3xy$
- (4) 若 $\overrightarrow{OQ} = x\overrightarrow{OA} + (y-1)\overrightarrow{OB}$ ，則 Q 點在 $\triangle OEF$ 內(含邊界)
- (5) 若 $\overrightarrow{OR} = (y-1)\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OB}$ ，則 $\overline{PR}$ 最小值為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填充題（占 70 分）

說明：第 5 題至第 14 題。

答對格數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10

得分 | 10 | 20 | 28 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 66 | 70

5. 在坐標平面上， $\vec{a} = (1, 3)$ 、 $\vec{b} = (2, 1)$ ，若 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 有最小值，則 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 坐標平面上 O 為原點，已知 $A(0, 2)$ 、 $B(-3, 4)$ ，若第四象限有一點 C ，滿足 $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{10}$ 且 $\overrightarrow{OC}$ 平分 $\angle AOB$ ，則 C 點的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 若方程組 $\begin{cases} (a+3)x - 2y = 2a \\ 3x + (2a-1)y = a-2 \end{cases}$ 恰有一解 (x_0, y_0) 且 $x_0 y_0 < 0$ ，則 a 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 & 3b_1 + 4a_1 \\ a_2 + 2b_2 & 3b_2 + 4a_2 \end{vmatrix} = 15$ ， $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -3$ ， $\begin{vmatrix} 2c_1 & 2a_1 \\ 2c_2 & 2a_2 \end{vmatrix} = 6$ ，則聯立方程式

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解 (x, y) 為【 】。

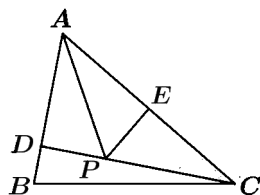
9. 坐標平面上，點 $A(a, d)$ 、點 $B(b, e)$ 、點 $C(c, f)$ ，若 A 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 4$ ，則方程組

$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ 的解為【 】。

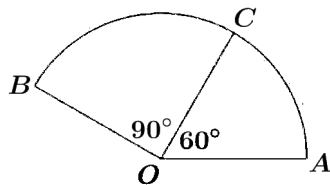
10. 若 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為 $(1, 2)$ ， $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影為 $(3, 4)$ ，則 $\overrightarrow{AP} =$ 【 】。

11. 已知向量 $\vec{x} = (a, -1)$ 與 $\vec{y} = (3, b)$ 在直線 $2x + y = 5$ 上有相同的正射影，當 $2(a+1)^2 + b^2$ 有最小值時， $ab =$ 【 】。

12. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{BC} = \sqrt{7}$ 、 $\overline{AC} = 3$ ，且 $\overline{BC}$ 的中垂線 $\overline{PE}$ 與 $\overline{AB}$ 上的高 $\overline{CD}$ 相交於點 P 。若 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，則數對 $(x, y) =$ 【 】。



13. 如圖扇形 AOB ($\overline{AO} = \overline{BO}$)，已知 C 在 $\widehat{AB}$ 上，且 $\angle AOC = 60^\circ$ 、 $\angle COB = 90^\circ$ ，若 $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ，則數對 $(x, y) =$ 【 】。

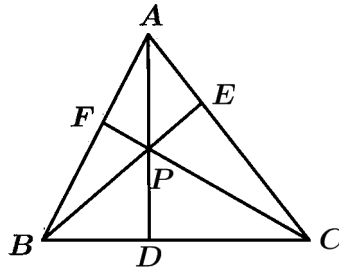


14. $\triangle ABC$ 在坐標平面上，若 $D(1, 4)$ 在 $\overline{AB}$ 上， $E(5, 3)$ 在 $\overline{BC}$ 上， $F(6, 5)$ 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{BE} : \overline{EC} = \overline{CF} : \overline{FA} = 1 : 2$ ，則 $\triangle ABC$ 的重心坐標為【 】。

第貳部分：混合題（占 12 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

如圖 $\triangle ABC$ ，已知 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 交於一點 P ，且 $\overline{AE}:\overline{EC}=1:2$ 、 $\overline{AF}:\overline{FB}=3:4$ ，試回答下列問題



15. $\triangle ABP$ 面積： $\triangle ACP$ 面積： $\triangle BCP$ 面積的最簡整數比為何？(非選擇題，4 分)

16. 若 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，則數對 (x, y) 為何？(非選擇題，4 分)

17. 若 $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ ，則數對 (α, β) 為何？(非選擇題，4 分)

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 135 2. 25 3. 15 4. 134

5. -1

6. $(1, -3)$

7. $1 < a < 6$

8. $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

9. $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

10. $(15, -5)$

11. $-\frac{56}{81}$

12. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

13. $(2, \sqrt{3})$

14. $(4, 4)$

第貳部分：混合題

15. $2 : 3 : 4$

16. $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$

17. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$