

範圍：積分與應用

滿分 116 分，超過 100 分者以 100 分計算

一、單選題（每題 7 分，共 14 分。）

1. 試問極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} (\sqrt{2n^2 + 8 \times 1^2} + \sqrt{2n^2 + 8 \times 2^2} + \sqrt{2n^2 + 8 \times 3^2} + \cdots + \sqrt{2n^2 + 8 \times n^2})$ 的值可用下列哪一個定積分表示？

(1) $\int_0^2 \sqrt{1+x^2} dx$

(2) $\int_0^2 \sqrt{1+8x^2} dx$

(3) $\int_0^2 \sqrt{2+8x^2} dx$

(4) $\int_0^2 \sqrt{2+2x^2} dx$

(5) $\int_0^2 \sqrt{2x^2+8} dx$

2. 令 $f(x) = x(x-1)[\log(x+1) - \log 3](2^x - 16)$ ，試問有多少個整數 a 滿足 $\int_0^a f'(x) dx \leq 0$ ？

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

(5) 5

二、多重選擇題（每題 10 分，每個選項 2 分，共 30 分。整題未作答者，該題不予計分。）

3. 設 $f(x) = -x^2 + 1$ ， $f(x)$ 的圖形與 x 軸及 $x=0$ 、 $x=1$ 所圍成的區域為 R ，將閉區間 $[0,1]$ 等分成 n 等分，區域 R 的下和為 L_n ，上和為 U_n ，且 $a = \sum_{i=0}^{49} f(\frac{i}{50})$ ， $b = \sum_{i=0}^{99} f(\frac{i}{100})$ ， $c = \sum_{i=1}^{50} f(\frac{i}{50})$ ， $d = \sum_{i=1}^{100} f(\frac{i}{100})$ ，試選出正確的選項。

(1) $a > c$

(2) $b > d$

(3) $b > a$

(4) $c > d$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{1}{3}$

4. 隕鐵鳥擁有極其強健的身軀，牠的最大飛行速度甚至可以超過音速 340 公尺/秒，若隕鐵鳥以速度 $v(t) = -t^2 + 40t$ (公尺/秒) 直線運動， t 表示出發後經過的時間(單位為秒)，試選出正確的選項。

(1) 在 12 秒時速度超過音速

(2) 在 20 秒時加速度最大

(3) 從 0 秒到 3 秒所經過的距離為 171 公尺

(4) 從 0 秒到 3 秒的平均速度為 57 公尺/秒

(5) 在 0 秒時的位置和在 60 秒時的位置相同

5. 設多項式函數 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ ，試選出正確的選項。

(1) 反曲點為 $(2,0)$

(2) $x = \frac{3}{2}$ 時有極大值 $\frac{3}{8}$

(3) $\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{5}{2}}^3 f(x)dx$

(4) $f(x)$ 的圖形和 x 軸所圍的封閉區域面積為 $\frac{1}{2}$

(5) $\int_{2-t}^{2+t} f(x)dx = 0$ ，其中 t 為任意實數

三、填充題(每格 7 分，共 42 分)

6. 計算定積分 $\int_0^2 [2x + (x-1)^3]dx = \underline{\textcircled{6}}$ 。

7. 計算定積分 $\int_0^2 2x(x^2-1)^3 dx = \underline{\textcircled{7}\textcircled{8}}$ 。

8. 計算定積分 $\int_{-2}^2 (|x-1| + \sqrt{4-x^2} + 2x^{99})dx = \underline{\textcircled{9} + \textcircled{10}\pi}$ 。

9. 設多項式函數 $f(x)=x^3+x\int_1^3 f(t)dt-4$ ，則 $\int_1^3 f'(x)dx = \underline{\textcircled{11}\textcircled{12}}$ 。

10. 若橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ ，則將 Γ 的圖形所圍成之封閉區域繞 x 軸旋轉一圈所得之旋轉體的體積為 $\underline{\textcircled{13}\textcircled{14}\pi^2}$ 。

11 若拋物線 $y = x^2 - 1$ 與直線 $y = x + 5$ 、 $x = -2$ 、 $x = 1$ 的圖形所圍成之封閉區域為 R ，則將 R 繞 x 軸旋

轉一圈所得之旋轉體的體積為 $\underline{\frac{\textcircled{15}\textcircled{16}\textcircled{17}}{\textcircled{18}\textcircled{19}}\pi}$ 。

四、混合題(每題 6 分，共 18 分)

若 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$ ，以 (a, b) 為切點的切線 L 之斜率為 $\frac{5a}{2}$ ，其中 a 為正整數，試回答 12~14 題。

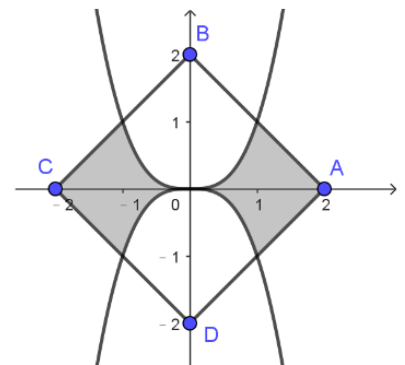
12. 求 $(a, b) = \underline{(\textcircled{20}, \textcircled{21})}$ 。

13. 切線 L 之方程式為 $y = \textcircled{22}x - \textcircled{23}$ 。

14. 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$ 與 L 所圍之封閉區域面積為 $\frac{\textcircled{24}\textcircled{25}}{\textcircled{26}}$ 。

五、加分題(每題 6 分，共 12 分)

15. 如圖，正方形 $ABCD$ ， $A(2, 0), B(0, 2), C(-2, 0), D(0, -2)$ ，與 $y = x^3$ 、 $y = -x^3$ 所圍陰影區域面積為 $\textcircled{27}$ 。



16. 承上題，過動點 $E(x, 0)$ ($-2 \leq x \leq 2$) 在 xy 平面作垂直 x 軸之鉛直線與陰影區域邊界交於 Q, R 兩點，若以 $\overline{QR}$ 為斜邊，在空間中作等腰直角 ΔPQR 垂直 xy 平面，其中 P 點之 z 坐標為正，則所有

ΔPQR 形成的立體體積為 $\frac{\textcircled{28}\textcircled{29}}{\textcircled{30}\textcircled{31}}$ 。

台北市立第一女子高級中學 112 學年度 第 2 學期 期末考 高三數學(理組)答案卷

高三_____班 座號_____號 姓名_____

一、單選題（每題 7 分，共 14 分。）

1.	2.
4	5

二、多重選擇題（每題 10 分，每個選項 2 分，共 30 分。整題未作答者，該題不予計分。）

3.	4.	5.
123	345	145

三、填充題(每格 7 分，共 42 分)

6.	7.	8.	9.
4	20	$5+2\pi$	18
10.	11.		
$36\pi^2$	$\frac{907}{15}\pi$		

四、混合題(每題 6 分，共 18 分)

12.	13.	14.
(2,6)	$y = 5x - 4$	$\frac{27}{4}$

五、加分題(每題 6 分，共 12 分)

15.	16.
3	$\frac{20}{21}$