

第壹部分：選擇（填）題（占 90 分）

一、單選題（占 8 分）

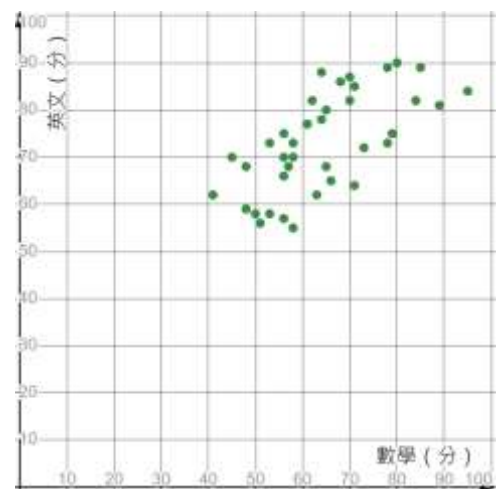
說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 4 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

- 已知 $\frac{-3}{2}, a, b, 1, 0, \frac{-1}{2}$ 為一組標準化後的數據，其中 $a \geq b$ ，則 $a - b$ 的值為下列哪一個選項？
 (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4
- 設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$ 。若 $S_{17} > 0$ 且 $S_{18} < 0$ ，則這 18 個數值 $\frac{S_1}{a_1}, \frac{S_2}{a_2}, \dots, \frac{S_{17}}{a_{17}}, \frac{S_{18}}{a_{18}}$ 中的最大數值為下列哪一個選項？
 (1) $\frac{S_8}{a_8}$ (2) $\frac{S_9}{a_9}$ (3) $\frac{S_{10}}{a_{10}}$ (4) $\frac{S_{11}}{a_{11}}$ (5) $\frac{S_{12}}{a_{12}}$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 3 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 6 分；答錯 2 個選項者，得 4 分；答錯 3 個選項者，得 2 分；所有選項均未作答或答錯多於 3 個選項者，該題以零分計算。

- 高一 26 班 38 位學生某次考試數學與英文兩科成績的散佈圖如右，每個點代表一位學生的成績。已知及格標準為 60 分，請選出正確的選項。
 (1) 兩科都不及格的學生有 6 位
 (2) 每位學生兩科成績的總和都超過 100 分
 (3) 數學成績的算術平均數大於英文成績的算術平均數
 (4) 數學成績的標準差大於英文成績的標準差
 (5) 英文成績對數學成績的最適合直線（迴歸直線）之斜率為正數



4. 某遊戲共有 n 位玩家，每位玩家均持有寶石，其中持有 1 顆的有 1×2 位，持有 2 顆的有 2×3 位，持有 k 顆的有 $k \times (k+1)$ 位，持有 20 顆寶石的有 20×21 位， $k=1,2,3,\dots,20$ 。請選出正確的選項。

(1) $n = 2660$

(2) 這些玩家每人持有寶石數量的第 1 四分位數 $Q_1 = 13$

(3) 這些玩家每人持有寶石數量的中位數為 15

(4) 這些玩家每人持有寶石數量的第 90 百分位數 $P_{90} = 20$

(5) 這些玩家每人持有寶石數量的算術平均數為 $\frac{61}{4}$

5. 已知正數數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ，設 $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ ，其中 p_n 與 q_n 互質， n 為正整數。請選出正確的選項。

(1) $a_6 = \frac{13}{21}$

(2) $a_{10} < a_{11} < a_{12} < a_{13}$

(3) $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{20} + p_{21} = p_{23} - 2$

(4) $p_{20}q_{21} - p_{21}q_{20} = 1$

(5) $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \dots + q_{20}^2 + q_{21}^2 = q_{21}q_{22} - 1$

6. 設等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的公比為 r ，其前 n 項的乘積為 $T_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{n-1} \times a_n$ ， n 為正整數，且滿足 $a_1 > 1$ 、 $a_{99} \times a_{100} - 1 > 0$ 、 $\frac{a_{99} - 1}{a_{100} - 1} < 0$ 。請選出正確的選項。

(1) $0 < r < 1$

(2) $a_{99} < 1$

(3) $a_{99} \times a_{101} - 1 < 0$

(4) T_{100} 是數列 $\langle T_n \rangle$ 中的最大值

(5) 使得 $T_n > 1$ 成立的最大正整數 n 為 198

7. 設二維數據 $(X, Y) = (0, 0), (1, 1), (a, b)$ ，其中 $a > 0$ 且 $b > 0$ 。令 X 與 Y 的相關係數為 r ，且 Y 對 X 的最適合直線（迴歸直線）之斜率為 m ，請選出正確的選項。

(1) 當 $r = 1$ 時， $a = b$

(2) 可以找到一組 a, b ，使得 $r = 0$

(3) 可以找到一組 a, b ，使得 $r = -1$

(4) 當 $a = 2$ 時， m 的值恆為正數

(5) 當 $a = \frac{1}{2}$ 時，可以找到一個 b ，使得 $m = \frac{1}{2}$

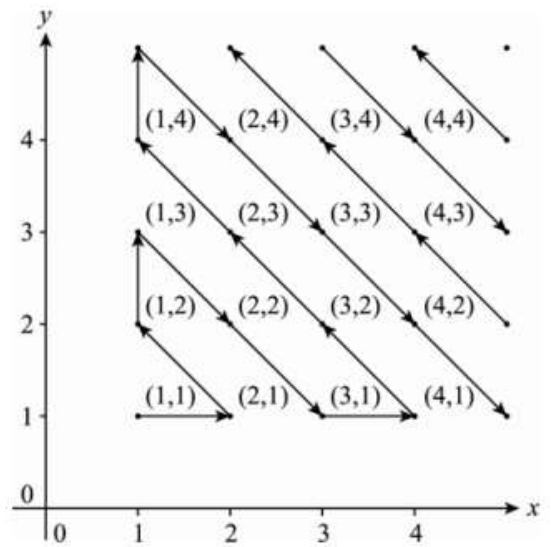
三、選填題（占 42 分）

說明：1.第 A 題至第 G 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (8-30)。每題完全答對得 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 已知一等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的前六項之和為 364，前三個奇數項的和為 $a_1 + a_3 + a_5 = 546$ ，則 $a_1 + a_6$ 的和為 ⑧⑨⑩。

B. 設二維數據 $(X, Y) = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{10}, y_{10})$ 共有十筆，且 $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 150$ ，
 $y_1 + y_2 + \dots + y_{10} = 200$ ， $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 5750$ ， $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{10}^2 = 18000$ ， X 與 Y 的相關係數為 $\frac{9}{10}$ 。已知 Y 對 X 的最適合直線（迴歸直線）之方程式為 $y = a + bx$ ，則數對 $(a, b) =$ $(\textcircled{11}\textcircled{12}, \frac{\textcircled{13}}{\textcircled{14}})$ 。（化成最簡分數）

C. 根據右圖的規律，將坐標平面在第一象限內 x, y 坐標都是整數的點依次排序而不遺漏，例如：第 1 點 $(1,1)$ 、第 2 點 $(2,1)$ 、第 3 點 $(1,2)$ 、第 4 點 $(1,3)$ 、第 5 點 $(2,2)$ 、第 6 點 $(3,1)$ 、第 7 點 $(4,1)$...。試問第 2024 點的坐標為 $(\textcircled{15}\textcircled{16}, \textcircled{17})$ 。



D. 已知等差數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 3$ 、公差 $d > 0$ 。若 $a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, a_{19}, a_{23}$ 的標準差為 $10\sqrt{105}$ ，則 $d^2 - 2a_6, 2d^2 - 2a_{11}, 3d^2 - 2a_{16}, 4d^2 - 2a_{21}, 5d^2 - 2a_{26}$ 的標準差為 $(\textcircled{18}\textcircled{19})\sqrt{\textcircled{20}}$ 。（化成最簡根式）

E. 設 x_1, x_2, x_3 為實數， $f(x) = \frac{1}{3}[(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + (x - x_3)^2]$ ，且當 $x = 8$ 時， $f(x)$ 有最小值 6.5。令 $g(x) = \frac{1}{3}[(x - 2x_1 + 1)^2 + (x - 2x_2 + 1)^2 + (x - 2x_3 + 1)^2]$ ，已知當 $x = h$ 時， $g(x)$ 有最小值 k ，則數對 $(h, k) =$ $(\textcircled{21}\textcircled{22}, \textcircled{23}\textcircled{24})$ 。

F. 數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_1 = 1$ ，且 $a_n + a_{n+1} = n$ ， n 為正整數，則 $a_{113} + a_{2024}$ 的值為 $(\textcircled{25}\textcircled{26}\textcircled{27}\textcircled{28})$ 。

G. 高一 26 班共 40 人，某次數學考試含選擇題(共 40 分)與選填題(共 60 分)，設全班選擇題分數與選填題分數的算術平均數分別為 $\mu_x = 24$ 分, $\mu_y = 42$ 分，標準差分別為 $\sigma_x = 5$ 分, σ_y 分。若全班數學考試總分的標準差為 14 分且選擇題分數與選填題分數的相關係數為 0.71，則

$$\sigma_y = \underline{\textcircled{29}\textcircled{30}}。$$

第貳部分：混合題（占 10 分）

說明：本部分共有 1 題組，配分標於題末。第 H 題至第 J 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (31-38)。

H-J 題為題組

在求一般性的分式線性遞迴：
$$\begin{cases} a_1 = a & , n=1 \\ a_{n+1} = \frac{Aa_n + B}{Ca_n + D}, n \geq 1 \end{cases}$$
，其中 $C \neq 0, AD - BC \neq 0$ ， A, B, C, D 為常數。

有一種方法稱為不動點方法，將 a_n 與 a_{n+1} 皆視為 x 可得 $x = \frac{Ax + B}{Cx + D}$ ，此方程式 $Cx^2 + (D - A)x - B = 0$

的根稱為不動點。求解 $\begin{cases} a_1 = 1 & , n=1 \\ a_{n+1} = \frac{4a_n + 2}{2a_n + 7}, n \geq 1 \end{cases}$ 的一般項 $a_n = ? (n \geq 1)$ 之相關步驟如下：

H. 將 a_n 與 a_{n+1} 皆視為 x 可得方程式 $x = \frac{4x + 2}{2x + 7}$ ，設此方程式的兩根為 $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ ，則數對 (α, β)

為下列哪一個選項？（單選題，3 分）列號 ③①

(1) $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ (2) $(1, -4)$ (3) $\left(\frac{1}{4}, -4\right)$ (4) $\left(2, \frac{-1}{2}\right)$ (5) $\left(3, \frac{-3}{2}\right)$

I. 承 H 題，設 $b_n = \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$ ，已知 $b_{n+1} = r \times b_n$ ， n 為正整數，其中 r 為定值，求此定值 $r = \underline{\textcircled{32}\textcircled{33}}$ 。

（化成最簡分數）（選填題，3 分）

J. 承 I 題，可得 $a_n = \frac{c_n}{6 \cdot 8^{n-1} - 3^{n-1}}$ ， n 為正整數，求數列 $\langle c_n \rangle$ 的前 5 項和

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = \underline{\textcircled{34}\textcircled{35}\textcircled{36}\textcircled{37}\textcircled{38}}。（選填題，4 分）$$

試題結束

臺中市立臺中第一高級中等學校 112 學年度第二學期第一次期中考高一數學科簡答

第壹部分：選擇（填）題

一、單選題

1. (3) 2. (2)

二、多選題

3. (1)(2)(4)(5) 4. (2)(4)(5) 5. (1)(3)(4) 6. (1)(3)(5) 7. (1)(2)(4)

三、選填題

A. 484 B. $(-7, \frac{9}{5})$ C. (57, 8) D. $75\sqrt{2}$ E. (15, 26) F. 1068 G. 10

第貳部分：混合題

H. (1) I. $\frac{3}{8}$ J. 14285