

112 學年度第一學期第二次定期考高二數 A 試題

命題範圍：第二章指對數函數及其圖形

已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$

一、單選題(每題 5 分，共 15 分)

1. 已知 $\log_3 x = 21$ ， $\log_9 y = 10$ ，則 $\log_3(x+2y)$ 的值最接近下列哪一個選項？
(A) 20.4 (B) 20.7 (C) 21.1 (D) 21.5 (E) 21.9。
2. 函數 $f(x) = |\log_2(x-1)|$ 在下列哪個區間是遞增的？
(A) $(-\infty, 1)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(1, 5)$ (E) $(2, 5)$ 。
3. 設 $a = 7^{\log_2 3.4}$ ， $b = 7^{\log_4 3.6}$ ， $c = \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_3 0.3}$ ，則下列選項何者正確？
(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > c > a$
(D) $b > a > c$ (E) $c > a > b$ 。

二、多重選擇題(每題8分，共40分)

每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得8分；答錯1個選項者，得5分；答錯2個選項者，得2分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 已知函數 $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 90$ ， $x \leq 3$ ，則下列哪些選項是正確的？
(A) 當 $x = 9$ 時， $f(x)$ 有最小值
(B) 當 $x = 2$ 時， $f(x)$ 有最大值
(C) $f(x)$ 有最小值 9
(D) $f(x)$ 有最大值 333
(E) $f(x)$ 沒有最大值

2. 判斷下列各式，試選出正確的選項。

(A) $7^{\log_7 3} = \log_7 7^3 = 3$ (B) $\log_3(3^5 + 3^7) = \log 3^{12} = 12$ (C) $3^{\frac{1}{\log 3}} = 10$

(D) $\log_{(-3)}(-3)^{112} = 112$ (E) $\log_3(\log_7 8) + 3\log_{27}(\log_2 7) = 1$ 。

3. 下列哪些函數滿足：當 x_1 、 x_2 在定義域中， $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 皆成立？

(A) $y = 2^x$ (B) $f(x) = x^3$ (C) $y = \log_2 x$ ($x > 0$)

(D) $y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ (E) $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$ 。

4. 下列各方程式中，請選出恰有 2 個實根的選項。

(A) $2^x - x = 0$ (B) $\log_3 x = (x-2)(x-4)$ (C) $|\log_2 x| + x = 3$

(D) $3^{|x|} + x^2 = 2$ (E) $\log_{0.5} x = x^3$ 。

5. 設 a, b 為正整數， a^{10} 是 42 位數， $(\frac{1}{b})^{20}$ 是純小數且小數點後第 86 位開始出現不為 0 的數字，則下列哪些選項是正確的？

(A) a 是 5 位數 (B) a 的最高位數字是 1

(C) $\frac{1}{b}$ 在小數點後第 5 位開始出現不為 0 的數字

(D) $\frac{1}{b}$ 在小數點後第一個不為 0 的數字是 5

(E) ab 是 9 位數。

三、填充題（共5題，每格7分，共35分）

1. 放射性物質質量變為原來的一半所需經過的時間，稱為該物質的半衰期。今已知某放射性物質「在兩年後剩下 320 克，而 14 年後剩下 80 克。試問該放射性物質從 128 克減少到 4 克，需經過 _____ 年。

2. 已知 $8^{x+1} - 4^{\frac{x+3}{2}} + 2^{x+1}(1-2^x) < 0$ ，則實數 x 的範圍為_____。
3. 實數 x, y 滿足 $x \geq \frac{1}{10}$ ， $y \geq \frac{1}{10}$ ， $x^2y = 10$ ，令 $X = \log x$ ， $Y = \log y$ ，若在 xy 坐標下，滿足條件的 $x^2y = 10$ 圖形為一線段，則此線段的長度為_____。
4. 求不等式 $\log_{0.09}(3-x) \leq \log_{0.3}(2x-3)$ 之解 x 的範圍為_____。
5. 若 α 滿足 $2x + 2^x = 5$ ， β 滿足 $2x + 2\log_2(x-1) = 5$ ，則 $\alpha + \beta =$ _____。

四、計算題(共10分，請列出計算過程，無計算過程者不計分)

(1) 某銀行提供小中的公司員工長期優惠存款，固定年利率為 3.6%，且以每個月複利計息一次 計算，若小中年初存入 100 萬元，試求 10 年後小中的存款約為多少元? ($1.003^{60} \approx 1.2$) (4%)

(2) 小建 因為買車於年初向銀行貸款 100 萬元，銀行以年利率 3.6%，每月複利計息一次計算，約定從次月初開始每月償還相同金額，分 10 年還清，試求小建 每月月初需償還的金額為多少元? (四捨五入到整數位， $1.003^{60} \approx 1.2$) (6%)

