

台北市立第一女子高級中學 112 學年度第一學期高三理組數學第二次段考試題

範圍：二次曲線 (得分超過 100 分者，以 100 分計。) 高三_____班 姓名：_____ 座號：_____

一、 單選題(每題 6 分，共 18 分。)

1. 在坐標平面上，滿足 $\log(x^2 + y^2 - xy + 2x + 1) = \log(6x^2 + 2y^2 - 6xy + 10) - \log 6$ 的所有點 (x, y) 所形成的圖形為下列何者？

- (1)點 (2)圓的一部分 (3)拋物線的一部分 (4)雙曲線的一部分 (5)橢圓的一部分

2. 在坐標平面上，點 $P(x, y)$ 為橢圓 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ 上的點，試問 $|2x + 3y - 4|$ 的最大值為下列何者？

- (1)1 (2)3 (3)5 (4)7 (5)9

3. 試問以原點為伸縮中心，分別將 x 坐標、 y 坐標伸縮 3、2 倍後， $x^2 + y^2 = 1$ 的方程式將為下列何者？

- (1) $9x^2 + 2y^2 = 1$ (2) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ (3) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ (4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (5) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

二、 多選題 (每題 10 分，共 30 分；每個選項答對得 2 分、答錯得 0 分，未作答者，不予計分。)

1. 試問下列哪些圖形與直線 $x + y = 0$ 的交點有兩個？

- (1) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1$ (2) $x^2 = -4y$ (3) $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{3} = 1$ (4) $4x^2 - y^2 + 8x + 4y = 0$ (5) $4^{x^2 + y^2} = 3$

2. 設 F_1 與 F_2 為雙曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ 的兩個焦點， P 為 Γ 上一點，使得此三點構成一等腰三角形。

試問以下哪些值不可能是這些等腰三角形的周長？

- (1)46 (2)48 (3)52 (4)72 (5)80

3. 設 A, B 為一拋物線 $\Gamma: y^2 = mx$ 上兩點，且其連線段通過 Γ 的焦點 F ，其中 m 為正數。

設 A, F, B 在 Γ 之準線上的投影分別為 A', F', B' ，且右圖為其示意圖，

其中 $\angle 1 = \angle A'F'A$ 、 $\angle 2 = \angle AF'F$ 、 $\angle 3 = \angle A'AF$ 、 $\angle 4 = \angle F'FB$ 、 $\angle 5 = \angle FF'B$ 。

試選出正確的選項。(此示意圖僅說明各點的相關位置，各點間距離關係未必正確)

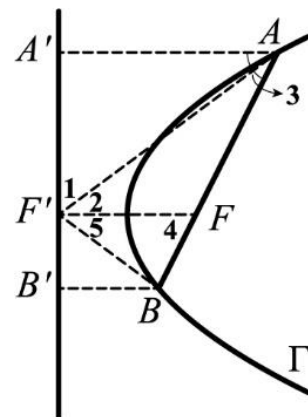
(1) 若 $\overline{A'A} = 8$, $\overline{A'F'} = 4$ ，則 $\angle 3 = 60^\circ$

(2) 若 $\overline{A'F'} = m = 8$ ，則 $\cos \angle 4 > 0.5$

(3) 若 $\overline{A'A} = 9$, $\overline{A'F'} = 3$ ，則 $\tan \angle 5 = 3$

(4) 若 $\angle 2 = 30^\circ$ ，且 $\overline{A'F'} = 3$ ，則 $\overline{AF'} = 6$

(5) 若 $\tan \angle 1 = m = 4$ ，則 $\overline{A'A} > m$



三、 填充題 (每題 7 分，共 56 分。)

1. 若一拋物線的準線方程式為 $x + 3 = 0$ ，焦點為 $(-7, 2)$ ，則此拋物線方程式的標準式為_____。

2. 若一橢圓的兩焦點為 $(3, 6)$ 、 $(3, -2)$ ，長軸長為 10，則此橢圓方程式的標準式為_____。

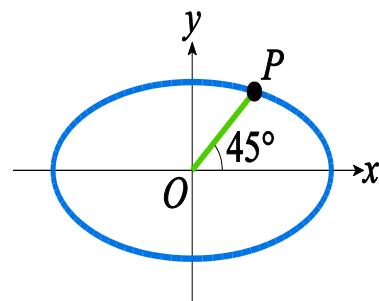
3. 若一雙曲線的兩焦點為 $(1, 2)$ 、 $(-3, 2)$ ，貫軸長為 2，則此雙曲線方程式的標準式為_____。

4. 設 $A(2, 0)$ 與 $B(b, 0)$ 為坐標平面上兩點，其中 $b > 2$ 。

若拋物線 $\Gamma: y^2 = 8x$ 上有一點 P 使得 $\triangle ABP$ 為正三角形，則 b 的值為_____。

5. 若橢圓 Γ 的長軸長為 8，且與橢圓 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$ 有相同的焦點，則 Γ 方程式的標準式為_____。

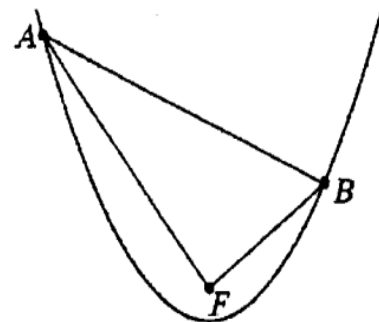
6. 在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別為 8、6。如右圖所示，通過橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角為 45° 的直線在第一象限跟橢圓相交於 P 點，則此交點 P 與中心 O 的距離為_____。



7. 設一雙曲線 Γ 的漸近線方程式分別為 $2x - 3y + 1 = 0$ 與 $2x + 3y - 5 = 0$ ，

若雙曲線 Γ 通過點 $(3, 0)$ ，則雙曲線 Γ 的實軸長為_____。

8. 右圖是一個拋物線的部分圖形，其中 F 為其焦點，且在此拋物線上，有相異兩點 A 、 B 使得 F 在 $\overline{AB}$ 與此拋物線所圍內部區域。若 $\overline{AF} = 20$ ， $\overline{BF} = 10$ ， $\overline{AB} = 10\sqrt{5}$ ，則此拋物線的焦距為_____。
(拋物線頂點和焦點的距離稱之為焦距)



四、混合題（題型與配分標記於題末，共 6 分。）

將橢圓 $\Gamma_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 以原點 O 為中心，依逆時針方向旋轉銳角 θ 後，得到橢圓 Γ_2 。

已知橢圓 Γ_2 的長軸方程式為 $y = \frac{4}{3}x$ ，試回下列問題。

(1) $\cos \theta =$ _____。(填充題，3 分)

(2) 求橢圓 Γ_2 的方程式。(非選擇題，3 分；須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分)

台北市立第一女子高級中學 112 學年度第一學期高三理組數學第二次段考答案卷

範圍：二次曲線 (得分超過 100 分者，以 100 分計。) 高三____班 姓名：_____ 座號：_____

一、 單選題(每題 6 分，共 18 分。)

1	2	3

二、 多選題 (每題 10 分，共 30 分；每個選項答對得 2 分、答錯得 0 分，未作答者，不予計分。)

1	2	3

三、 填充題 (每題 7 分，共 56 分。)

1	2	3	4
5	6	7	8

四、 混合題 (題型與配分標記於題末，共 6 分。)

(1) $\cos \theta =$ _____。(填充題，3 分)

(2) (非選擇題，3 分；須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分)

台北市立第一女子高級中學 112 學年度第一學期高三理組數學第二次段考答案卷

範圍：二次曲線 (得分超過 100 分者，以 100 分計。) 高三____班 姓名：_____ 座號：_____

一、 單選題(每題 6 分，共 18 分。)

1	2	3
(3)	(5)	(4)

二、 多選題 (每題 10 分，共 30 分；每個選項答對得 2 分、答錯得 0 分，未作答者，不予計分。)

1	2	3
(2)(3)(4)(5)	(1)(3)(5)	(2)(4)(5)

三、 填充題 (每題 7 分，共 56 分。)

1	2	3	4
$(y-2)^2 = (-8)(x+5)$	$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$	$\frac{(x+1)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$	10
5	6	7	8
$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$	$\frac{12\sqrt{2}}{5}$	$\sqrt{7}$	2

四、 混合題 (題型與配分標記於題末，共 6 分。)

(1) $\cos \theta = \underline{\frac{3}{5}}$ 。(填充題，3 分)

(2) (非選擇題，3 分；須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分)

橢圓 $\Gamma_2: 91x^2 - 24xy + 84y^2 - 300 = 0$