

臺北市立第一女子高級中學 112 學年度 第一學期 期末考 試題卷

高一數學 範圍：多項式函數 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____ . . .

本試卷之題型均可自行判斷使用計算機為計算工具，允許的計算機機型限定以下四款：

E-More FX-127 、 Fuhbao FX-180 、 Canon F-502G 、 Casio FX-82Solar(II)

一、多重選擇題（每個選項 2 分，共 30 分，答錯不倒扣）

1. 下列關於多項式函數的敘述，請選出正確的選項。

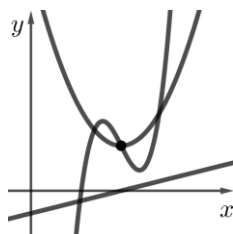
- (1). 已知 $a \neq 0$ ，則任意三次函數 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形都可以經由 $y = ax^3$ 的圖形平移得到。
- (2). 將多項式 $f(x)$ 分別除以 $x^3 + 1$ 和 $x^2 - x + 1$ ，其餘式必不相同。
- (3). 若 $f(x)$ 為二次函數，對稱軸為 $x = 113$ ，又 $f(2024) < 0$ ， $f(120) > 0$ ，則此圖形的開口向下。
- (4). 已知點 (a, b) 在 $y = x^3$ 的圖形上，則點 $(-a + 2, b + 1)$ 必在 $y = -(x - 2)^3 + 1$ 的圖形上。
- (5). 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ， $g(x) = f(x + 2)$ ，則 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的係數總和會相同。

2. 設兩相異多項式 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分別為 m 次和 n 次，下列敘述哪些正確？

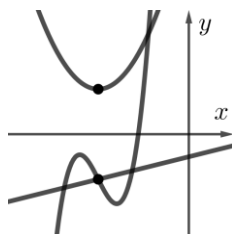
- (1). $\deg(f(x) + g(x))$ 可能為 $m + n$ 。
- (2). 若 $m \geq n$ ，則 $\deg(f(x) - g(x)) \leq m$ 。
- (3). $\deg(f(x)g(x)) = mn$ 。
- (4). $\deg(f(x^2 + 1)) = m^2$ 。
- (5). 已知 $f(x)$ 為一多項式函數。若 $\deg(f(x)) = 3$ ，則 $\deg([f(x)]^3) = 6$ 。

3. 已知 $f(x) = a(x - h)^3 + b(x - h) + k$ ， $g(x) = a(x - h)^2 + k$ ， $h(x) = ax + b$ ，則下列哪些情形是可能會發生的？

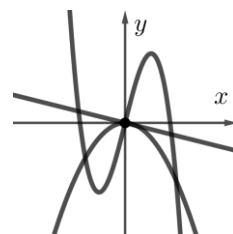
(1)



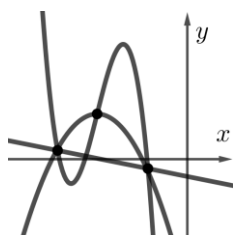
(2)



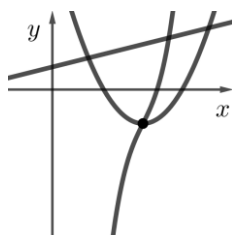
(3)



(4)



(5)



二、填充題（每題 6 分，共 60 分）

4. 設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 18$ 有一次因式 $(x - 2)$ 和 $(x - 3)$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 承上題， $f(x) > 0$ 的解為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 下圖為一多項式 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 除以 $x - 1$ 之綜合除法的計算過程。
試求 $a + b + d + e = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|-------|
| a | $+b$ | $+c$ | $+d$ | $+e$ | |
| $+f$ | $+2$ | $+g$ | $+h$ | | 1 |
| a | $+i$ | $+5$ | $+j$ | | $+19$ |
7. 解 $-(x + 1)(x + 2)(x + 3) + (x + 2) < 0$ 。
8. 當 x 很大的時候，多項式函數 $y = f(x)$ 的圖形很接近 $y = 2x^3$ ，又在 $x = 0$ 附近的圖形近似於直線 $y = 5x - 3$ ，且滿足 $f(-1) = -4$ ，則 $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 已知 $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 5$ ，試求 $f(1.51)$ 的近似值。（四捨五入至小數點後第二位）
10. 設 $f(x)$ 為三次多項式，且 $f(1) = f(-1) = 1$ ， $f(2) = 4$ ， $f(0) = 6$ 。試求 $f(5) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 坐標平面上有相異三點 $A(3, 1)$, $B(0, 7)$, $C(2, k)$, 其中 k 為實數。已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 過 A 、 B 兩點，但必不通過 C 點，試問 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
12. 今有三次函數 $f(x)$ 和 二次函數 $g(x)$ ，已知 $y = f(x)$ 的對稱中心和 $y = g(x)$ 的頂點均為 $(0, 1)$ 。而將 $(x - 1)f(x)$ 除以 $g(x)$ ，得商式 $x^2 - x - 2$ 和餘式 $3x + 1$ 。
試問 $f(x) - g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
13. 本學年恰逢一女中雙甲子校慶，小智在校園中進行一項數學的解謎任務：「多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - x + 1$ ，餘式為 $5x - 1$ ；除以 $x^2 + x + 1$ ，餘式為 $-x + 3$ ；除以 $x^4 + x^2 + 1$ ，餘式為 $2x^3 + ax^2 + bx + c$ ；請問序組 (a, b, c) 為何？」小智看得一頭霧水，於是決定使用一次提示的機會：「 $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ 。」
請妳幫幫小智完成任務：序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、計算題（占 10 分，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分！）

14. 「帶動唱」是展現高一新生青春活力的舞台。在表演的過程中，小儀和小旗分別站在小樂的東方 2 公尺處和北方 3 公尺處。此時，為了要變換隊形，小樂不動，而小儀和小旗則同時做「等速度直線」運動：小儀的速度為 1 公尺/秒（向東），小旗的速度為 1.5 公尺/秒（向南）。假設經過 t 秒，試問：
- (1). 試以 t 表示三人彼此之間的「距離平方和」。（請展開，並以降冪的方式排列。）（6 分）
- (2). 當 t 為多少時，三人彼此之間的「距離平方和」會最小？（4 分）

臺北市立第一女子高級中學 112 學年度 第一學期 期末考 **解答** 卷

高一數學 範圍：多項式函數 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____ .

一、 多選題（每個選項 2 分，共 30 分，答錯不倒扣）

1	2	3
(3)(4)	(1)(2)	(1)(5)

分數

二、 填充題（每題 6 分，共 60 分）

4	5	6	7	8
$(-8, 21)$	$x > 2, x \neq 3$	16	$-2 - \sqrt{2} < x < -2$ 或 $-2 + \sqrt{2} < x$	$(-1, -4)$
9	10	11	12	13
7.26	241	3	$x^3 - x^2 - x$	$(3, 2, 4)$

三、 計算題（占 10 分，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分！）

14. (1)

$$\frac{13}{2}t^2 - 10t + 26 \quad (\text{視情況部分給分，全對得 6 分})$$

14. (2)

$$t = \frac{10}{13} \quad (\text{秒}) \quad (\text{視情況部分給分，全對得 4 分})$$

詳解

一、多選題

1.

- (1). 錯。反例： $y = ax^3 + px$ ， $a \neq 0$ ， $p \neq 0$ ，無法由 $y = ax^3$ 平移而得。
- (2). 錯。反例： $\deg(f(x)) = 1$ 。
- (3). 對，各點之相對位置標示在直角坐標上便可知曉。
- (4). 對。點 (a, b) 在 $y = x^3$ 的圖形上，可知 $b = a^3$ ；將點 $(-a + 2, b + 1)$ 代入 $y = -(x - 2)^3 + 1$ ，發現與原式相符。
- (5). 錯， $g(1) = f(3)$ 不一定等於 $f(1)$ 。

2.

- (1). 對。例如： $\deg(f(x)) = \deg(g(x)) = 0$ 。
- (2). 對。
- (3). 錯， $\deg(f(x)g(x)) = m + n$ 。
- (4). 錯， $\deg(f(x^2 + 1)) = 2m$ 。
- (5). 錯，若 $\deg(f(x)) = 3$ ，則 $\deg([f(x)]^3) = 9$ 。

3. $a > 0$ ：二次函數開口朝上、三次函數右側朝上。

(h, k) ：二次函數的頂點、三次函數的對稱中心。

b ：一次函數的 y 截距。

只有(1)(5)有可能會發生。

二、填充題

4. $f(2) = 8 + 4a + 2b - 18 = 0$ ， $2a + b = 5$

$$f(3) = 27 + 9a + 3b - 18 = 0$$

$$(a, b) = (-8, 21)$$

5. $f(x) = (x - 2)(x - 3)^2 > 0 \rightarrow x > 2$ ， $x \neq 3$

6. $f(1) - c = 19 - 3 = 16$

7. $(x^2 + 4x + 2)(x + 2) > 0 \rightarrow -2 - \sqrt{2} < x < -2$ ， $-2 + \sqrt{2} < x$

8. $y = f(x) = 2x^3 + ax^2 + 5x - 3$

$$f(-1) = -2 + a - 5 - 3 = -4 \rightarrow a = 6$$

$$h = -\frac{6}{3 \times 2} = -1 \therefore \text{對稱中心 } (-1, -4)$$

9. $f(x) = 8\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + 24\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 26\left(x - \frac{3}{2}\right) + 7 \rightarrow f(1.51) = 7.26$

10. $f(x) = a(x + 1)(x - 1)(x - 2) + x^2$ ， $a \neq 0$

$$f(0) = 2a = 6 \rightarrow a = 3$$

$$f(5) = 3 \times 6 \times 4 \times 3 + 25 = 241$$

11. 二次函數通過 A 、 B 兩點，但必不通過 C 點，表示 A 、 B 、 C 三點共線！

$$m_{AB} = m_{BC} \rightarrow \frac{7-1}{0-3} = \frac{k-7}{2-0} \rightarrow k = 3$$

12. $f(x) = ax^3 + px + 1$ ， $a \neq 0$ ， $p \neq 0$

$$g(x) = bx^2 + 1, b \neq 0$$

$$(x-1)f(x) = g(x)(x-2)(x+1) + 3x + 1$$

$$0 = g(1) \times (-1) \times 2 + 4 \rightarrow g(1) = b + 1 = 2 \rightarrow b = 2$$

$$f(2) = 8a + 2p + 1 = 7 \rightarrow 4a + p = 3$$

$$f(-1) = -a - p + 1 = 1 \rightarrow a + p = 0$$

$$a = 1, p = -1$$

$$f(x) - g(x) = (x^3 - x + 1) - (x^2 + 1) = x^3 - x^2 - x$$

13. 令 $f(x) = (x^4 + x^2 + 1)q(x) + 2x^3 + ax^2 + bx + c$

$$\because x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$\therefore 2x^3 + ax^2 + bx + c = (x^2 - x + 1)[2x + (a + 2)] + (a + b)x + (c - a - 2)$$

$$\text{得 } a + b = 5, c - a - 2 = -1 \rightarrow c - a = 1$$

$$2x^3 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)[2x + (a - 2)] + (b - a)x + (c - a - 2)$$

$$\text{得 } b - a = -1, c - a = 1$$

$$\text{所以, } (a, b, c) = (3, 2, 4)$$

三、計算題

14.

$$(1). 2 \left[\left(3 - \frac{3}{2}t \right)^2 + (2 + t)^2 \right] = \frac{13}{2}t^2 - 10t + 26$$

$$(2). \frac{13}{2} \left[t^2 - \frac{20}{13}t + \left(\frac{10}{13} \right)^2 \right] + 26 - \frac{50}{13} = \frac{13}{2} \left(t - \frac{10}{13} \right)^2 + 26 - \frac{50}{13} \rightarrow t = \frac{10}{13}, \text{ 三人之距離平方和會最小。}$$