

新竹市新竹高中 112 上高一期末考

一、多選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 6 分。(6-4-2-0)

1. 下列哪一個聯立不等式無解？

$$(1) \begin{cases} x + y - 4 \leq 0 \\ 2x + 2y + 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y < 2 \\ x - y < 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x - y + 4 < 0 \\ x + y > 3 \\ y < 2x + 5 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 < 0 \\ -10 \leq 3x - 4y \leq -3 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x \geq 2 \\ y \leq -1 \\ x - 2y \leq 2 \end{cases}$$

2. 已知三角形 ABC 的高落在直線 $L_1: x + y = 8$ 、 $L_2: 2x - y = 13$ ，又頂點 A 的坐標為 $(9, 0)$ ，頂點 B 在第一象限，請問下列何者正確？

(1) 直線 L_2 通過頂點 A

(2) 直線 AB 的方程式為 $3x - 2y = 30$

(3) 直線 AC 的方程式為 $x - y = 9$

(4) B 點坐標為 $(5, 3)$

(5) 三角形 ABC 的垂心坐標為 $(7, 1)$

3. 已知圓 C 外一點 P 對圓 C 作兩切線，若兩切線與 x 軸的交點分別為 $A(-9, 0)$ 、 $B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ，且 O 為圓 C 的圓心，直線 PO 的方程式為 $x - y = -2$ ，試選出正確的選項。

(1) $\overline{PA} = 3\overline{PB}$

(2) A 到直線 PO 的距離為 $\frac{7}{\sqrt{2}}$

(3) B 點關於直線 PO 的對稱點坐標為 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)$

(4) P 點坐標為 $(5, 7)$

(5) 若圓 C 恰為三角形 PAB 之內切圓，則圓心 O 的坐標為 $(0, 2)$

4. 設 $A(3, 4)$ 、 $B(5, 6)$ ，試選出正確的選項。

(1) 設平面上一點 P ，若 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，則滿足此條件的 P 的軌跡方程式為一圓

(2) 設平面上一點 P ，若 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$ ，則恰有兩點滿足此條件的 P

(3) 設平面上一點 P ，若 $\overline{PA} \perp \overline{PB}$ 且 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，則恰有一點滿足此條件的 P

(4) 設平面上一點 P ，若 $\overline{PA} \perp \overline{PB}$ 且 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$ ，則恰有兩點滿足此條件的 P

(5) 以 A 、 B 為直徑兩端點的圓方程式為 $(x - 3)(x - 5) - (y - 4)(y - 6) = 0$

二、填充題（占 69 分）

說明：第 5 題至第 16 題。												
答對題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
分數	7	14	21	27	33	39	44	49	54	59	64	69

5. 已知三角形的三頂點為 $A(-4, 2)$ 、 $B(3, 3)$ 、 $C(0, -2)$ ，則三角形 ABC 的外心坐標為【 】。

6. 梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 平行且 $\overline{AD}$ 垂直 $\overline{CD}$ 。若 $A(0, 3)$ 、 $B(-3, 1)$ 、 $C(3, -2)$ ，則 D 點坐標為【 】。

7. 通過 $(1, 2)$ 且與兩軸上截距相等的直線方程式為【 】。

8. 設點 $P(x, y)$ 為 $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 7$ 上一點，則 $\frac{|4x + 3y - 3|}{5}$ 的最大值為【 】。

9. 滿足聯立不等式 $\begin{cases} 3x + 2y - 18 \leq 0 \\ x - 2y \geq 0 \\ y + 2 \geq 0 \end{cases}$ 圖形，且 x 、 y 坐標皆為整數的點共有【 】個。

10. 在坐標平面上 $(6, 8)$ 處有一光源，將 $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$ 投影到 x 軸的影長為【 】。

11. 設 $P(x, y)$ 滿足不等式 $2|x| + 3|y| \leq 6$ ，若 $(x + 1)^2 + (y + 1)^2$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m =$ 【 】。

12. 設 $A(3, 1)$ ， $B(-1, 3)$ ，動點 P 在直線 $L: x + y + 2 = 0$ 上，則當 $|\overline{PA} - \overline{PB}|$ 有最大值時，此時的 P 點坐標為【 】。

13. 設 a 為一實數，已知滿足聯立不等式的 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \\ 2x - y \leq a \\ x + 2y \leq 12 \end{cases}$ 所有點所形成之區域面積為 $\frac{256}{45}$ 平方單位，則 $a =$ 【 】。

14. 正方形 $ABCD$ 內部有一點 P ， P 距離紙張左邊界 4 公分，距離下邊界 3 公分。今將紙張的左下角 A 點往內折至 P 點，則摺進去的三角形面積是【 】平方公分。

15. 設 m 為一實數，若方程式 $x^2 + y^2 + 2mx + 2(m + 1)y + 3m^2 + m = 0$ 的圖形為一圓且圓心在第四象限，已知 m 的範圍為 $a < m < b$ ，則 $a + b =$ 【 】。

16. 設圓 $C: (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 2$ 上取一點 P ， x 上取一點 Q ， $y = x$ 上取一點 R ，其中 Q 、 R 為相異兩點，則三角形 PQR 周長最小值為【 】。

三、計算證明題（占 7 分）

說明：第 17 題。

17. 設圓 $C : x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

(1) 用 d 、 e 表示圓心坐標，並證明之。(2 分)

(2) 設圓上一點 $P(x_0, y_0)$ ，證明過 P 點且與圓 C 相切的直線為

$$x_0x + y_0y + d\left(\frac{x+x_0}{2}\right) + e\left(\frac{y+y_0}{2}\right) + f = 0 \text{。 (5 分)}$$

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 245 2. 35 3. 24 4. 4

5. $\left(-\frac{3}{8}, \frac{13}{8}\right)$

6. $\left(\frac{22}{5}, \frac{4}{5}\right)$

7. $x + y = 3, y = 2x$

8. $2 + \sqrt{7}$

9. 33

10. $\frac{14}{3}$

11. 17

12. $(-9, 7)$

13. $-\frac{2}{3}$

14. $\frac{625}{96}$

15. $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

16. $3\sqrt{10} - 2$

第貳部分：混合題

17. 略