

一、填充題（占 100 分）

1. 利用消去法解方程組
$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ x + 4y - 3z = 2 \\ 3x - y + 4z = 6 \end{cases}$$
，求得的解 $(x, y, z) = [\quad]$ 。

試求 k 之值為【 】。

試求 k 之值為【 】。

5. 給定空間坐標中的四個向量 $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (-3, -6, -5)$, $\vec{c} = (1, 1, -1)$ 與 $\vec{d} = (0, -1, -2)$, 試將 $\vec{d}$ 表示成 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的線性組合 $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, 則序組 $(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 試利用增廣矩陣的列運算解方程組
$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$
，若令 $z = 3t$ ，其中 t 為實數，則數對 $(x, y) =$ 。(以 t 表示)

8. 在平面座標上，先對 y 軸作鏡射，再以原點 O 為中心逆時針旋轉 180° 的二階方陣可表示為【 】。

9. 若方程式 $\begin{bmatrix} a & -2 \\ 1 & a-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 無解，則 a 之值為【 】。

10. 已知直線 $L: x+2y-3=0$ 經方陣 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ 線性變換後變成直線 L' ，求 L' 的方程式為【 】。

11. 試求 A 為 2×2 階方陣，且 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，

12. 設二次多項式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形通過 $(1, 2)$ 、 $(2, -3)$ 、 $(-2, 5)$ 三點，試求 $a - b + c =$ 【 】。

13. 設 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ，若 $(I + 2J)^{-1} = rI + sJ$ ，其中 r, s 為實數，則數對 $(r, s) =$ 【 】。

14. 在空間坐標中，設直線 $L_1: \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+5y+7z=2 \end{cases}$ ， $L_2: \begin{cases} 3x+y+2z=-1 \\ x+4y+5z=1 \end{cases}$ ，試求直線 L_1 與 L_2 之交點坐標為【 】。

15. 設 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ，試求滿足 $B^{-1}YA^{-1} = C$ 的 2 階方陣 $Y =$ 【 】。

16. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，求滿足 $AX = A - X$ 的矩陣 $X =$ 【 】。

17. 有甲和乙兩支大瓶子，開始時分別裝有 a 公升的純水和 b 公升的純酒精。每一輪操作都是先將甲瓶的溶液倒出一半到乙瓶，再將乙瓶的溶液倒出一半回甲瓶。設經過 n 輪操作之後，甲和乙瓶分別裝有 a_n 公升和 b_n 公升的溶液。則經過 2 輪操作之後，求甲瓶的酒精濃度為【 】。（以 a, b 表示）

18. 設坐標平面上一直角三角形 OPQ ，其中 $O(0, 0)$ ， $P(4, 0)$ ， $Q(0, 3)$ ，若經沿 x 軸方向的推移變換後，新圖形 $O'P'Q'$ 滿足 $\angle O'P'Q' = 45^\circ$ ，求此推移變換的矩陣為【 】。

19. 義大利數學家 *Fibonacci* 造就了著名的費式數列 $\{F_n\}$ ：從第一項開始書寫依序為

$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ ，這些項滿足遞迴式 $\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$ ，其中 n 為任意正整數，例如第三項

$F_3 = F_2 + F_1 = 2$ ，第四項 $F_4 = F_3 + F_2 = 3$ ，試問：

(1) 若對於所有正整數 n ，恆有 $\begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$ ，其中 M 是一個二階方陣，試求

$M = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ 。

(2) 承上題 (1)，求 $M^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ 。

参考答案

1. $(1, 1, 1)$

2. 5

3. 5

4. 4

5. $(2, 1, 1)$

6. 12

7. $(1 - 4t, 5t)$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

9. 2

10. $x = 3$

11. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

12. 65

13. $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$

14. $(-1, -2, 2)$

15. $\begin{bmatrix} 56 & -34 \\ -42 & 26 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

17. $\frac{10b}{10b + 11a}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 89 \\ 55 \end{bmatrix}$