

桃園市武陵高中 112 上高三第一次期中考

一、多選題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 10 分。(10-6-4-0)

1. 關於數列與級數的極限運算，選出正確選項。

(1) 若數列 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ 均收斂，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(2) 當 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 值存在時，數列 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ 均收斂

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2}{n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$

(4) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂，則 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ 收斂

(5) 若 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂

2. 若一函數 f ，對每一個 x 在其定義域恆有 $f(x) = f(-x)$ ，稱此函數為偶函數，請在下列五個函數中，選出為偶函數的選項。

(1) $f_1(x) = x^4 + x^2 + 3$

(2) $f_2(x) = 2^x + \frac{1}{2^x}$

(3) $f_3(x) = \frac{\tan x}{2^x - 2^{-x}}$

(4) $f_4(x) = \frac{(x^3 + x)(\sin x + \tan x)}{x(\cos x + x^2)}$

(5) $f_5(x) = x \log_2 |x|$

二、填充題（占 60 分）

說明：第 3 題至第 12 題，每題 6 分。

3. 計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 3n^2 + 4}{(n+2)(2n-1)(3n+7)} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

4. 計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5 \times 2^{2n}}{3 \times 4^n - 13} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

5. 計算 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 4^k}{5^k} =$

6. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3n - 1}{n + 3} - \frac{an^2 + bn + c}{n - 1} \right) = 2$ ，試求 $a + b = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

7. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+2}} \right) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

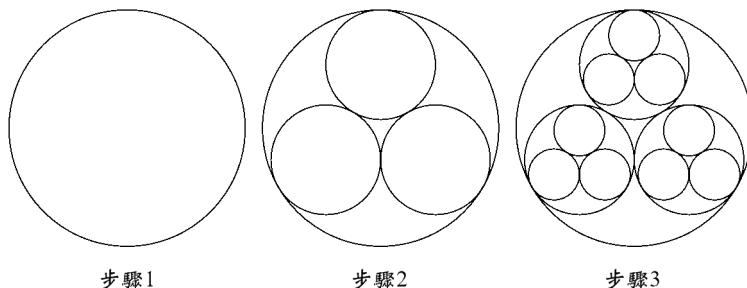
8. 求無窮級數 $1 + \frac{\cos 60^\circ}{2} + \frac{\cos 120^\circ}{4} + \frac{\cos 180^\circ}{8} + \frac{\cos 240^\circ}{16} + \cdots + \frac{\cos((n-1) \times 60^\circ)}{2^{n-1}} + \cdots = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

9. 若 $f_1(x) = x^2$ ， $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ ，如 $f_2(x) = f(f_1(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$ ，
問： $f_{10}(2)$ 是幾位數： $\text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。(log 2 = 0.3010)

10. 已知： $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{12r}$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

11. 求函數 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+3}$ 的值域： $\text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

12. 如圖所示，在步驟1先畫一個半徑為2的圓，步驟2為步驟1的圓裡再畫三個和大圓相切，且彼此相切的相同半徑的圓，步驟3為步驟2所多畫的小圓再畫三個和小圓相切，且彼此相切的半徑相同的圓，依此類推，若步驟 n 完成時所有的圓的面積和為 A_n ， $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{2\pi}{a\sqrt{3}-b}$ ，其中 a, b 為有理數，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



三、計算證明題（占 60 分）

說明：第 13 題至第 14 題。

13. (1) 試證明： $\frac{2n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{n^2 + n + 1}$ （3 分）

(2) 試證明： $n^2 + n + 1 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 1$ （3 分）

(3) 計算無窮級數 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{2 \times 1}{1^4 + 1^2 + 1} + \frac{2 \times 2}{2^4 + 2^2 + 1} + \frac{2 \times 3}{3^4 + 3^2 + 1} + \cdots + \frac{2 \times n}{n^4 + n^2 + 1} + \cdots$ 之值（6 分）

14. 請使用夾擠原理計算： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 2n}} \right)$ 之值。（8 分）

參考答案

1. 15 2. 123

3. $\frac{5}{6}$

4. $\frac{5}{3}$

5. $\frac{11}{2}$

6. -5

7. $\sqrt{2} - 1$

8. 1

9. 309

10. $\frac{1}{8}, \frac{1}{15}$

11. $-\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$

12. $(18, 31)$

13. (1) 略；(2) 略；(3) 1

14. 2