

臺北市立第一女子高級中學 112 學年度 第二學期 第一次期中考 試題卷

高一數學

命題範圍：數列與級數、數據分析

班級：____ 座號：____ 姓名：____

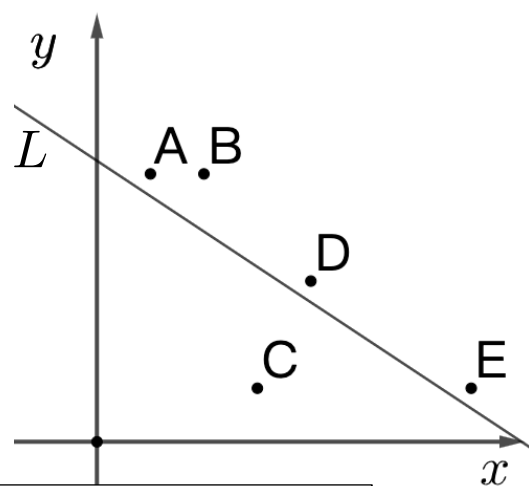
本試卷題型均可自行判斷使用計算器為計算工具，允許的計算器機型限定下列四款：
E-More FX-127 、 Fuhbao FX-180 、 Canon F-502G 、 Casio FX-82Solar(II)

一、 單選題 (占 12 分，每題 4 分)

說明：每題有 5 個選項，只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得 4 分；答錯或未作答者，該題以零分計算。

1. 如右圖，有關兩個變量 x, y 5 對資料以及 y 對 x 的迴歸直線(最適直線) L ，
試問去掉下列哪一對資料，會使剩下來的數據的相關係數變小？

(1) A (2) B (3) C (4) D (5) E。



2. 設 n 是自然數，試推測 $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ 的結果，並利用數學歸納法證明。

小華寫作業練習這個題目時，分成下列幾個步驟

步驟一： $\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$ ， $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ， $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{8}$ ，

猜測 $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$

步驟二：當 $n = 1$ 時， $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{1+2}{2 \times (1+1)}$ ，故原式成立。

步驟三：假設 $n = k$ 時，原式成立，即 $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)}$

步驟四：則 $n = k + 1$ 時

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k+2}\right)\left(1 + \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{k+1}{k+2} \times \frac{k+3}{k+2} = \frac{k+3}{2(k+2)} = \frac{(k+1)+2}{2[(k+1)+1]} \end{aligned}$$

，即當 $n = k + 1$ 時，原式亦成立。

步驟五：故由數學歸納法原理得知：對於所有的自然數 n ，

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

小華將作業交給老師批改後，發現這題被老師要求要訂正重寫，試問小華的證明過程從哪一步驟開始出現錯誤？

(1) 步驟一 (2) 步驟二 (3) 步驟三 (4) 步驟四 (5) 步驟五。

3. 考拉茲猜想是一個橫跨近百年的數學難題：已知一數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = m$ ， $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{當 } a_n \text{ 是偶數} \\ 3a_n + 1, & \text{當 } a_n \text{ 是奇數} \end{cases}$ ，

無論 m 是哪個正整數，數列 $\langle a_n \rangle$ 一定會有一項 $a_M = 1$ (M 是正整數)。小看到這個猜想後覺得很神奇，決定代

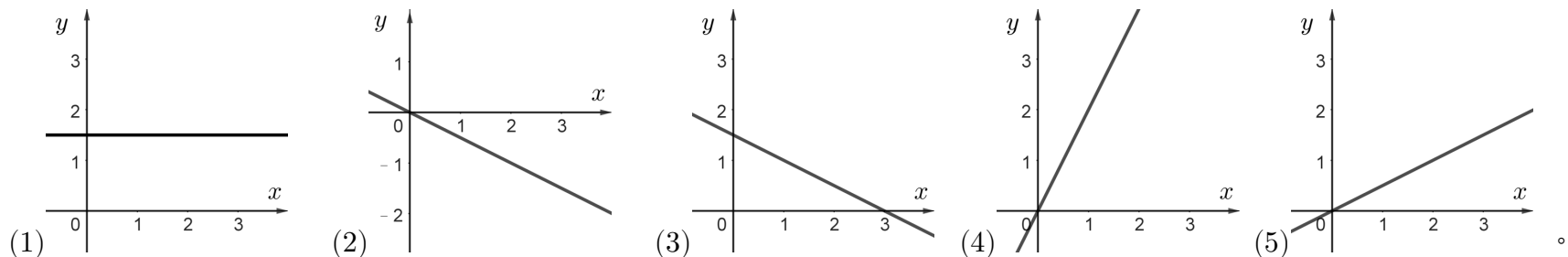
入 $a_1 = 3$ 進行計算，真的發現 $a_M = 1$ ，試問下列選項中，何者可能是 M 的值？

(1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 8 (5) 9。

二、多選題 (占 20 分，每題 10 分，每個選項 2 分)

說明：每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，每答對一個選項得2分；所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 下列哪些選項有可能是二維數據經過標準化後的迴歸直線（最適直線）？



5. 設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的公差不為 0，其前 n 項的算術平均數為 b_n ，

若擷取數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 113 項為數據 A （即 $A: a_1, a_2, \dots, a_{113}$ ），

並擷取數列 $\langle b_n \rangle$ 的前 113 項為數據 B （即 $B: b_1, b_2, \dots, b_{113}$ ），

假設數據 A 的標準差為 σ_A ，數據 B 的標準差為 σ_B ，試選出正確的選項。

- (1) $a_1 = b_1$
- (2) $b_2 > b_1$
- (3) $\langle b_n \rangle$ 是等差數列
- (4) $\sigma_A : \sigma_B = 2 : 1$
- (5) 二維數據 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{113}, b_{113})$ 的相關係數為 1。

三、填充題 (占 42 分，每格 6 分)

說明：請將正確答案在答案卷之「填充題答案區」作答，答案需完全答對才給分。

6. 小綠文具有限公司今年(四季)的營業額目標是平均成長率 20%，已知第一季成長率為 -10% ，第二季成長率

為 60% ，第三季成長率為 20% ，則第四季成長率至少需要 _____%，才能達到營業額目標。

7. 試求有規律的級數 $1^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + 3^2 \times 4 + \dots + 20^2 \times 21 =$ _____。

8. 假設 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，滿足 $a_2 + a_4 = 10$ ， $a_6 + a_8 = 160$ ，且 $a_1 < 0$ ，此數列前二十項的和為 $\frac{2^{20} - b}{c}$ ，

其中 b, c 皆為小於 20 的正整數，求 $(b, c) =$ _____。

9. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足前 n 項總和 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 3n^2 + 4n + 2024$ ，求 $a_{113} =$ _____。

10. 已知三個數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 及 $\langle c_n \rangle$ ，其中 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2 \end{cases}$

$\langle b_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_n = b_{n-1} + 2n + 1, n \geq 2 \end{cases}$ ，且 a_n, b_n, c_n 為直角三角形的三邊長，其中 c_n 為斜邊。

(1) 試求數列 $\langle b_n \rangle$ 的一般項為_____。

(2) 已知數列 $\langle c_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} c_1 = 5 \\ c_n = c_{n-1} + f(n), n \geq 2 \end{cases}$ ，其中 $f(n)$ 為一多項式，

試求 $f(n) =$ _____。

11. 已知實數 a_1, a_2, a_3 成等差數列， b_1, b_2, b_3 成等比數列，滿足 $b_1 = a_1^2, b_2 = a_2^2, b_3 = a_3^2$ ，且 $b_1 > b_2$ ，
求等比數列 b_1, b_2, b_3 的公比為_____。

四、混合題(占 26 分)

說明：本部分共有 2 個題組，配分標於題末。選擇題、填充題與非選擇題限在「混合題答案區」作答，非選擇題作答時請由左而右橫式書寫，且作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12.13 題為題組

「開根號乘以 10」是一種常見的調整分數方式，若原始分數為 x ，則調整後的分數 $y = 10\sqrt{x} = \sqrt{100x}$ 。此調分方式是將原始分數和 100 取幾何平均數，所以只要原始分數在 $(0, 100)$ 之間，調整後分數一定會變高。由於此調分方式不是線性調整，部分統計量在調整後不一定是調整前的統計量「開根號乘以 10」。以算數平均數為例，1 和 3 的算術平均數為 2， $10\sqrt{1}$ 和 $10\sqrt{3}$ 的算術平均數並不是 $10\sqrt{2}$ 。試回答下列問題：

12. 假設一年美班有 38 個人，班上期末考數學成績不太理想，數學老師決定利用「開根號乘以 10」調整分數，試問下列哪些統計量在調整後**一定是**調整前的統計量「開根號乘以 10」？(多選題，5 分，每個選項 1 分)

(1) 幾何平均數 (2) 眾數 (3) 中位數 (4) 第 88 百分位數 (5) 四分位距。

13. 已知一年美班在調整前的成績 $x_1, x_2, \dots, x_{38}$ 的算數平均數 μ_x 為 30 分，調整後的成績 $y_1, y_2, \dots, y_{38}$ 的算數平均數 μ_y 為 50 分，試問調整後的成績的標準差是多少？(非選擇題，6 分)

14,15,16 題為題組

得證飲料店想要調查最高氣溫(°C)和飲料銷量(杯)的相關性，以下是近四天的數據

氣溫 (x) (單位：°C)	23	21	19	17
銷量 (y) (單位：杯)	700	600	400	500

已知氣溫 (x) 的算術平均數 $\mu_x = 20$, 標準差 $\sigma_x = \sqrt{5}$,

銷量 (y) 的算術平均數 $\mu_y = 550$, 標準差 $\sigma_y = 50\sqrt{5}$, 試回答下列問題：

14. 試計算 x 與 y 的相關係數 r_{xy} 為_____。(化成最簡分數)(填充題，5 分)

15. 利用銷量 (y) 對氣溫 (x) 的迴歸直線(最適直線)預測，當最高溫氣溫是 25°C 時，銷量為_____。

(非選擇題，5 分)

16. 承上題，若將氣溫從攝氏溫度 x (°C) 改成華氏溫度 x' (°F) ($x' = 1.8x + 32$)，則新的銷量 (y) 對氣溫 (x') 的迴歸直線(最適直線)方程式 L' 的斜率為 m 且經過點 $(a, 550)$ ，則 $(m, a) =$ _____。(化成最簡分數)

(非選擇題，5 分)

參考公式

1. 一維數據 X ： $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu^2}$

2. 二維數據 (X, Y) ： $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r = \frac{(x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + (x_2 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) + \dots + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y}$

迴歸直線(最適直線)方程式 $y - \mu_y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)$

臺北市立第一女子高級中學 112 學年度 第二學期 第一次期中考 答案卷

高一數學

命題範圍：數列與級數、數據分析

班級：____ 座號：____ 姓名：_____

一、單選題(占 12 分，每題 4 分)二、多選題(占 20 分，每題 10 分，每個選項 2 分)

1	2	3	4	5

分數

三、填充題 (占 42 分，每格 6 分)

6	7	8	9	10(1)	10(2)	11

四、混合題 (占 26 分)

12	多選題(5 分)	14	填充題(5 分) $r_{xy} = \underline{\hspace{2cm}}$
13	非選擇題(6 分)	15	非選擇題(5 分)
		16	非選擇題(5 分)

一、單選題(占 12 分，每題 4 分)二、多選題(占 20 分，每題 10 分，每個選項 2 分)

1	2	3	4	5
3	4	4	25	1345

分數

三、填充題 (占 42 分，每格 6 分)

6	7	8	9	10(1)	10(2)	11
20	46970	(1,3)	679	$n^2 + 2n$	$2n + 1$	$3 - 2\sqrt{2}$

四、混合題 (占 26 分)

12	多選題(5 分) 124	14	填充題(5 分) $r_{xy} = \frac{4}{5}$
13	非選擇題(6 分) 所求 = $\sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{38}^2}{38} - 50^2}$ (2 分) = $\sqrt{\frac{100x_1 + 100x_2 + \dots + 100x_{38}}{38} - 50^2}$ (2 分) = $\sqrt{100 \times \mu_x - 50^2}$ (1 分) = $\sqrt{100 \times 30 - 50^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$(1 分)	15	非選擇題(5 分) y 對 x 的最適直線 L 為 $y - 550 = \frac{4}{5} \times \frac{50\sqrt{5}}{\sqrt{5}}(x - 20)$ (2 分) $x = 25$ 代入 L (2 分) 所求 = $550 + 40 \times 5 = 750$ (1 分)
		16	非選擇題(5 分) $r_{x'y} = r_{xy}$ (1 分) $\sigma_{x'} = 1.8\sigma_x$ (1 分) $\mu_{x'} = 1.8\mu_x + 32$(1 分) $(a, 550) = (a, \mu_y)$，得 $a = \mu_{x'} = 68$(1 分) $m = r_{x'y} \frac{\sigma_y}{\sigma_{x'}} = r_{xy} \frac{\sigma_y}{1.8\sigma_x} = \frac{40}{1.8} = \frac{200}{9}$ (1 分) $(m, a) = (\frac{200}{9}, 68)$

高一數學

命題範圍：數列與級數、數據分析

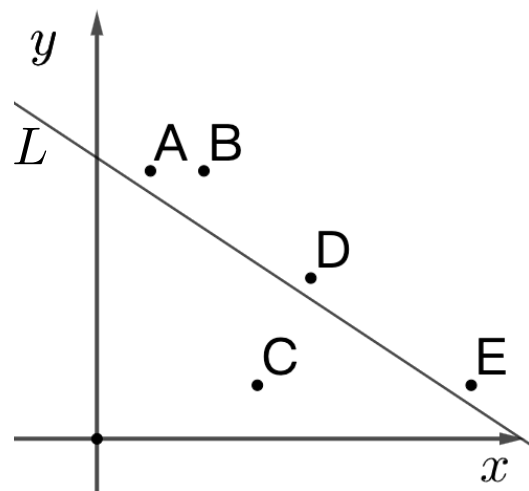
班級：____ 座號：____ 姓名：____

本試卷題型均可自行判斷使用計算器為計算工具，允許的計算器機型限定下列四款：
E-More FX-127 、 Fuhbao FX-180 、 Canon F-502G 、 Casio FX-82Solar(II)

五、 單選題 (占 12 分，每題 4 分)

說明：每題有 5 個選項，只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得 4 分；答錯或未作答者，該題以零分計算。

1. 如右圖，有關兩個變量 x, y 5 對資料以及 y 對 x 的迴歸直線（最適直線） L ，
試問去掉下列哪一對資料，會使剩下來的數據的**相關係數**變小？
(1) A (2) B (3) C (4) D (5) E。



< sol >

負相關相關係數變小代表越相關，所以選擇去掉最不線性相關的 C

2. 設 n 是自然數，試推測 $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ 的結果，並利用數學歸納法證明。

小華寫作業練習這個題目時，分成下列幾個步驟

步驟一： $\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$ ， $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ， $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{8}$ ，
猜測 $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$

步驟二：當 $n = 1$ 時， $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{1+2}{2 \times (1+1)}$ ，故原式成立。

步驟三：假設 $n = k$ 時，原式成立，即 $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)}$

步驟四：則 $n = k + 1$ 時

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k+2}\right)\left(1 + \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{k+1}{k+2} \times \frac{k+3}{k+2} = \frac{k+3}{2(k+2)} = \frac{(k+1)+2}{2[(k+1)+1]} \end{aligned}$$

，即當 $n = k + 1$ 時，原式亦成立。

步驟五：故由數學歸納法原理得知：對於所有的自然數 n ，

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

小華將作業交給老師批改後，發現這題被老師要求要訂正重寫，試問小華的證明過程從哪一步驟**開始**出現錯誤？

- (1) 步驟一 (2) 步驟二 (3) 步驟三 (4) 步驟四 (5) 步驟五。

< sol >

數學歸納法要用到 $n = k$ 的假設去證明 $n = k + 1$ ，故步驟四錯誤

3. 考拉茲猜想是一個橫跨近百年的數學難題：已知一數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = m$ ， $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{當 } a_n \text{ 是偶數} \\ 3a_n + 1, & \text{當 } a_n \text{ 是奇數} \end{cases}$ ，

無論 m 是哪個正整數，數列 $\langle a_n \rangle$ 一定會有一項 $a_M = 1$ (M 是正整數)。小看到這個猜想後覺得很神奇，決定代

入 $a_1 = 3$ 進行計算，真的發現 $a_M = 1$ ，試問下列選項中，何者可能是 M 的值？

(1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 8 (5) 9 。

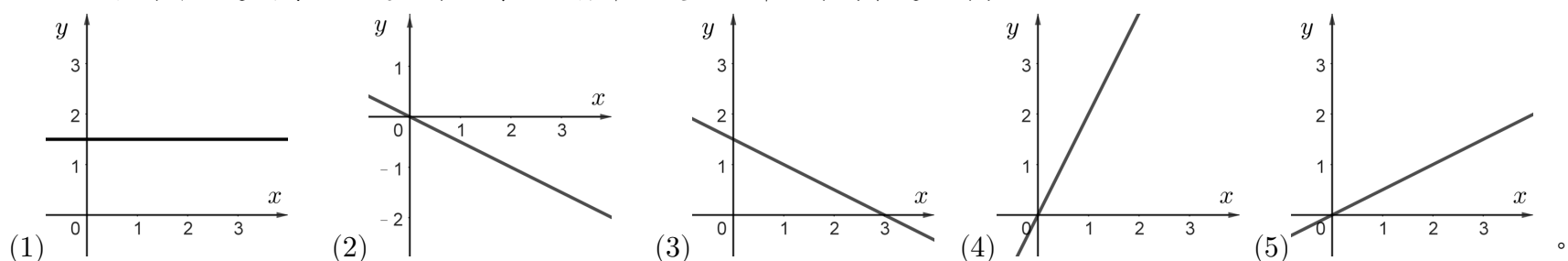
< sol >

一項一項代入： $3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ，第八項為 1

六、多選題 (占 20 分，每題 10 分，每個選項 2 分)

說明：每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，每答對一個選項得 2 分；所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 下列哪些選項有可能是二維數據經過標準化後的迴歸直線 (最適直線)？



< sol >

標準化數據的平均是 0，標準差是 1，故標準化後的最適直線通過 (0,0)，且斜率就是相關係數 r ， $|r| \leq 1$ ，故答案選 25

5. 設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的公差不為 0，其前 n 項的算術平均數為 b_n ，

若擷取數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 113 項為數據 A (即 $A: a_1, a_2, \dots, a_{113}$)，

並擷取數列 $\langle b_n \rangle$ 的前 113 項為數據 B (即 $B: b_1, b_2, \dots, b_{113}$)，

假設數據 A 的標準差為 σ_A ，數據 B 的標準差為 σ_B ，試選出正確的選項。

(1) $a_1 = b_1$

(2) $b_2 > b_1$

(3) $\langle b_n \rangle$ 是等差數列

(4) $\sigma_A : \sigma_B = 2 : 1$

(5) 二維數據 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{113}, b_{113})$ 的相關係數為 1。

< sol >

$$(1) a_1 = S_1 = \frac{S_1}{1} = b_1$$

$$(2) b_2 - b_1 = \frac{a_2 - a_1}{2} = \frac{d}{2} \text{ 無法判斷正負}$$

$$(3) b_n = \frac{\frac{n(a_1 + a_n)}{2}}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_n}{2} = a_1 + \frac{n-1}{2}d \text{ 為等差數列}$$

$$(4) b_n = \frac{a_1}{2} + \frac{a_n}{2}, \text{ 標準差和平移無關，只和伸縮倍率的絕對值有關，故 } \sigma_B = \frac{\sigma_A}{2}$$

$$(5) b_n = \frac{a_1}{2} + \frac{a_n}{2}, \text{ 散布圖會落在一條斜率為 } \frac{1}{2} \text{ 的斜直線上，故相關係數為 } 1$$

七、填充題 (占 42 分，每格 6 分)

說明：請將正確答案在答案卷之「填充題答案區」作答，答案需完全答對才給分。

6. 小綠文具有限公司今年(四季)的營業額目標是平均成長率 20%，已知第一季成長率為 -10% ，第二季成長率為 60% ，第三季成長率為 20% ，則第四季成長率至少需要_____%，才能達到營業額目標。

< sol >

假設第四季成長率為 $r\%$

可得 $(1 - 0.1)(1 + 0.6)(1 + 0.2)(1 + r\%) \geq 1.2^4$ ，得 $r\% \geq 20\%$

7. 試求有規律的級數 $1^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + 3^2 \times 4 + \cdots + 20^2 \times 21 =$ _____。

< sol > 一般項為 $k^2(k + 1) = k^3 + k^2$ ，

故所求為 $(1^3 + 2^3 + \cdots + 20^3) + (1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2) = \left(\frac{20 \times 21}{2}\right)^2 + \frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 46970$

8. 假設 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，滿足 $a_2 + a_4 = 10$ ， $a_6 + a_8 = 160$ ，且 $a_1 < 0$ ，此數列前二十項的和為 $\frac{2^{20} - b}{c}$ ，

其中 b, c 皆為小於 20 的正整數，求 $(b, c) =$ _____。

< sol >

$\begin{cases} a_2 + a_4 = 10 \\ a_6 + a_8 = 160 \end{cases}$ 兩式相除得 $r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$ ，代回第一式得 $a_1 = \pm 1$ ，但 $a_1 < 0$ ，故 $a_1 = -1, r = -2$

前二十項的和為 $\frac{-1(1 - (-2)^{20})}{1 - (-2)} = \frac{2^{20} - 1}{3}$

9. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足前 n 項總和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3n^2 + 4n + 2024$ ，求 $a_{113} =$ _____。

< sol >

$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 + 4n + 2024 - [3(n-1)^2 + 4(n-1) + 2024] = 6n + 1 (n > 1), a_{113} = 679$

10. 已知三個數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 及 $\langle c_n \rangle$ ，其中 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2 \end{cases}$

$\langle b_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_n = b_{n-1} + 2n + 1, n \geq 2 \end{cases}$ ，且 a_n, b_n, c_n 為直角三角形的三邊長，其中 c_n 為斜邊。

(1) 試求數列 $\langle b_n \rangle$ 的一般項為_____。

(2) 已知數列 $\langle c_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} c_1 = 5 \\ c_n = c_{n-1} + f(n), n \geq 2 \end{cases}$ ，其中 $f(n)$ 為一多項式，

試求 $f(n) =$ _____。

< sol >

(1) 累加法：

$$b_2 = b_1 + 5$$

$$b_3 = b_2 + 7$$

.

.

.

$$+) b_n = b_{n-1} + 2n + 1$$

$$b_n = 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 = \frac{n(3 + 2n + 1)}{2} = n(n + 2)$$

(2)

觀察 $c_n = b_n + 2$ ，故 $f(n) = c_n - c_{n-1} = b_n - b_{n-1} = 2n + 1$

11. 已知實數 a_1, a_2, a_3 成等差數列， b_1, b_2, b_3 成等比數列，滿足 $b_1 = a_1^2, b_2 = a_2^2, b_3 = a_3^2$ ，且 $b_1 > b_2$ ，求等比數列 b_1, b_2, b_3 的公比為_____。

< sol >

因為 $b_1 > b_2 > 0$ ，故公差不為零且公比小於一，令 $a_1 = a - d, a_2 = a, a_3 = a + d$ ，所求 $= \frac{(a+d)^2}{a^2}$
 由等比中項得 $(a^2)^2 = (a+d)^2(a-d)^2 = [(a+d)(a-d)]^2 = a^4 - 2a^2d^2 + d^4 \Rightarrow 2a^2 = d^2 \Rightarrow \pm\sqrt{2}a = d$
 公比 $= \frac{(a+d)^2}{a^2} = \frac{a^2(1 \pm \sqrt{2})^2}{a^2}$ (+不合，因為會大於 1) $= (1 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$

八、混合題(占 26 分)

說明：本部分共有 2 個題組，配分標於題末。選擇題、填充題與非選擇題限在「混合題答案區」作答，非選擇題作答時請由左而右橫式書寫，且作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12.13 題為題組

「開根號乘以 10」是一種常見的調整分數方式，若原始分數為 x ，則調整後的分數 $y = 10\sqrt{x} = \sqrt{100x}$ 。此調分方式是將原始分數和 100 取幾何平均數，所以只要原始分數在 (0,100) 之間，調整後分數一定會變高。由於此調分方式不是線性調整，部分統計量在調整後不一定會是調整前的統計量「開根號乘以 10」。以算數平均數為例，1 和 3 的算術平均數為 2， $10\sqrt{1}$ 和 $10\sqrt{3}$ 的算術平均數並不是 $10\sqrt{2}$ 。試回答下列問題：

12. 假設一年美班有 38 個人，班上期末考數學成績不太理想，數學老師決定利用「開根號乘以 10」調整分數，試問下列哪些統計量在調整後一定是調整前的統計量「開根號乘以 10」？(多選題，5 分，每個選項 1 分)

(1) 幾何平均數 (2) 眾數 (3) 中位數 (4) 第 88 百分位數 (5) 四分位距。

< sol >

$$(1) \sqrt[n]{10\sqrt{x_1} \times 10\sqrt{x_2} \times \dots \times 10\sqrt{x_n}} = 10\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

(2) 正確，因為開根號是嚴格遞增函數

(3) $\frac{38}{2} = 19 \in \mathbb{N}$ ，故調整前中位數為 $\frac{x_{19} + x_{20}}{2}$ ，由題幹可知不成立

(4) $38 \times \frac{88}{100} = 33.44$ 不是整數，故調整前第 88 百分位數為 x_{34} ，正確，因為開根號是嚴格遞增函數

(5) 由題幹可知相加不成立，可推得相減也不成立

13. 已知一年美班在調整前的成績 $x_1, x_2, \dots, x_{38}$ 的算數平均數 μ_x 為 30 分，調整後的成績 $y_1, y_2, \dots, y_{38}$ 的算數平均數 μ_y 為 50 分，試問調整後的成績的標準差是多少？(非選擇題，6 分)

14,15,16 題為題組

得證飲料店想要調查最高氣溫(°C)和飲料銷量(杯)的相關性，以下是近四天的數據

氣溫 (x) (單位：°C)	23	21	19	17
銷量 (y) (單位：杯)	700	600	400	500

已知氣溫 (x) 的算術平均數 $\mu_x = 20$, 標準差 $\sigma_x = \sqrt{5}$,

銷量 (y) 的算術平均數 $\mu_y = 550$, 標準差 $\sigma_y = 50\sqrt{5}$, 試回答下列問題：

14. 試計算 x 與 y 的相關係數 r_{xy} 為 _____。(化成最簡分數)(填充題，5 分)

<sol>

$x - \mu_x$	3	1	-1	-3
$y - \mu_y$	150	50	-150	-50

$$r = \frac{\text{離均差乘積和}}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{450 + 50 + 150 + 150}{4 \times \sqrt{5} \times 50\sqrt{5}} = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$$