

111 學年度第一學期第二次定期考高三數甲試題

命題範圍：第二章微分

一、多選題（每題 5 分，共 30 分）

每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 已知 $f(x)$ 為定義域和對應域皆為實數的函數，且 a, b, c, d 皆為實數，請選出正確的選項。

(A) 當 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在時，稱此極限為函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的導數，記作 $f'(a)$

(B) 當函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的導數 $f'(a)$ 存在時，我們稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 處可微分

(C) 若 $f(b)$ 為極值，則 $f'(b) = 0$

(D) 若 $f'(c) = 0$ ，則 $f(c)$ 為極值

(E) 若 $f'(d) = -1$ ，則 $f(x)$ 在 $x = d$ 處有可能不連續

2. 已知函數 $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 1$ 且其定義域為實數，請選出正確的選項。

(A) $f(x)$ 的局部極值為 $f(0)$ 及 $f(\frac{1}{2})$

(B) $f(x)$ 的最小值為 $f(\frac{1}{2})$

(C) $f(x)$ 遞增的區間為 $[\frac{1}{2}, \infty)$

(D) $f(x)$ 凹向下的區間為 $(0, \frac{1}{2})$

(E) $f(x)$ 的反曲點為 $(0, f(0))$ 及 $(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3}))$

3. 有一梯形 $ABCD$ ， $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AD} = 1$ 、 $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{BC} = 2$ ，其中 P 為 $\overline{AB}$ 上之動點；假設 $\overline{AP} = x$ ，並令 $\triangle DPC$ 的面積為 $f(x)$ 、 $\triangle DPC$ 的周長為 $g(x)$ 、 $\cos \angle DPC$ 為 $h(x)$ 。請在 $0 \leq x \leq 3$ 的範圍中，選出正確的選項。

(A) $f'(x) > 0$

(B) $g(x)$ 為遞增函數

(C) $g'(1) = 0$

(D) $h(x) \geq 0$

(E) $h(x)$ 的極小值發生在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 時

二、選填題（共 55 分）

每題完全答對才給分，配分如下表所示。

答對題數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	0	10	20	25	30	35	40	45	50	53	55

1. 已知函數 $f(x) = \left(\frac{5x-7}{x^2-3} \right)^3$ ，則 $f'(2)$ 之值為_____。

2. 已知 $y = x^3 + ax^2 + bx + 3$ 之反曲點坐標為 $(-2, 5)$ ，則數對 (a, b) 為_____。

3. 已知在函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 8$ 圖形上所有切線的斜率中，以 $P(3, -4)$ 為切點的切線斜率最小，則數對 (a, b) 為_____。

4. 已知函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 在 $x = -2$ 處有極大值 24，在 $x = 4$ 處有極小值，則 $a + b + c$ 之值為_____。

5. 已知 -1 為 $x^6 + ax^2 + bx + c = 0$ 的三重根，則 $a + b + c$ 之值為_____。

6. 已知函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 處可微分， a, b 皆為實數且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1) \cdot x^5}{x-1} = a \cdot f(1) + b \cdot f'(1)$ ，則數對 (a, b) 為_____。
7. 已知 $x^3 + 3x^2 - 9x + k = 2$ 有兩相異負根及一正根，則實數 k 的範圍為_____。
8. 已知 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3) \cdots (x-10)}{(x+1)(x+2)(x+3) \cdots (x+10)}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+3x) - f(1-2x)}{4x}$ 之值為_____。
9. 已知 $f(x) = (a-1)x^3 + (a+1)x^2 + (a-2)x + 3$ 為嚴格遞增函數，則實數 a 的範圍為_____。
10. 已知函數 $f(x) = (x-1)^2(2kx^2 - 3kx + 1)$ 有三個極值，則實數 k 的範圍為_____。

三、計算證明題（每小題 5 分，共 15 分）

1. 已知 $f(x)$ 是一個定義域和對應域皆為實數的連續函數，且對於任意實數 a, b 皆滿足 $f(a+b) = \frac{1}{3} f(a)f(b)$ ，若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x))^2 - 9}{x} = 2022$ ，請回答下列各小題。
- (1) 試證明 $f(0) = 3$ 。(5 分)
- (2) 試求 $f'(0)$ 之值並證明之。(5 分)
- (3) 試證明 $f(x)$ 在任意實數 c 上皆可微分。(5 分)