

北一女中 ^{111 學年度} 第一學期 第一次期中考 高三 數學科試題 (數甲)

一、單選題 (每題 5 分，共 10 分)

1. 設 $a = 0.\overline{32}$ 、 $b = 0.\overline{01}$ 。則 $a + b$ 的值是下列哪一個選項？

- (1) $\frac{33}{100}$ (2) $\frac{3333}{10000}$ (3) $\frac{3}{9}$ (4) $\frac{30}{99}$ (5) $\frac{329}{990}$

2. 已知實數數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+1} a_n$ ， n 為正整數。

試問下列有關極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \times a_n)$ 的敘述何者正確？

- (1) 極限不存在 (2) 極限為 $\frac{1}{2}$ (3) 極限為 1 (4) 極限為 2 (5) 極限為 4

二、多選題

(每題 10 分，共 40 分；錯 1 選項得 8 分，錯 2 選項得 5 分，錯 3 選項得 2 分，錯多於 3 選項 0 分)

3. 下列哪一個函數的圖形與函數 $f(x) = x$ 的圖形相同？

- (1) $f_1(x) = \sqrt{x^2}$ (2) $f_2(x) = \frac{x^2}{x}$ (3) $f_3(x) = \frac{x(2 + \sin x)}{2 + \sin x}$
(4) $f_4(x) = \frac{x + \ln e^x}{2}$ (5) $f_5(x) = 2^{\log_2 x}$

4. 設 $f(x)$ 為一定義在非零實數上的實數值函數， $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{當 } x > 0 \\ 0, & \text{當 } x = 0 \\ -1, & \text{當 } x < 0 \end{cases}$ 。

已知極限 $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)g(x))$ 存在，試選出正確的選項。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 存在 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^2$ 存在 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在
(4) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在 (5) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^2$ 存在

5. 考慮多項式 $f(x) = (x^2 + 6x - 1)(4x^3 - 4x + 1)$ ，試選出正確的選項。

- (1) $f(x) = 0$ 的圖形和 y 軸交點的 y 坐標小於 0 (2) $f(x) = 0$ 有 5 個實根
(3) $f(x) = 111$ 至少有 1 個實根 (4) $f(x) = 0$ 有一根介於 -1 與 -2 之間
(5) $f(x) = 0$ 在 0 與 1 之間沒有根

6. 設無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 符合 $a_0 = 0$ 且當 $n \geq 1$ 時， a_n 滿足

$$a_n - a_{n-1} = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^n, & \text{當 } n \text{ 為奇數,} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{當 } n \text{ 為偶數.} \end{cases}, \text{試選出正確的選項。}$$

(1) $a_2 = \frac{1}{16}$ (2) $a_3 > \frac{1}{32}$ (3) $a_{100} - a_{98} < 0$ (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 0$ (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

三、填充 (每格 5 分，共 40 分) ***每一格都應有答案，若無答案，請填寫不存在。

A. 求下列各式的極限值。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2022^n}{2020^n + 2021^n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 - 1}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3 - 3x - x^2| - 7}{x - 2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

B. 設 $f(x)$ 為滿足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$ ， $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-3} = 12$ 的最低次多項式，則 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

C. 若函數 $f(x) = \begin{cases} 6x + 2a, & x \geq 1 \\ ax - 2, & -2 < x < 1 \\ -4x + b, & x \leq -2 \end{cases}$ 在所有實數皆連續，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

D. 令 n 為正整數， T_n 為平面上以兩平行直線 $L_1: y = -nx + 6n$ ， $L_2: y = -nx + 9n$ ，以及 x 軸、 y 值所圍成的梯形區域面積，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、混合題 (共 10 分)

說明：本部分答案必須寫在「答題區」上。若因字跡潦草，未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法辨識，其後果由考生自行承擔。非選擇題必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分，每一題配分標於題末。

假設兩數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，對所有正整數 n 都滿足 $2b_n + \frac{6n-30}{n} < a_n < 4b_n$ 。已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 12$ ，

試回答下列各題。

1. 若 $a_3 = 15$ ，下列何者不可能是 b_3 的值? (2 分)

(1)3 (2)5 (3)7 (4)9

2. 試判斷數列 $\langle b_n \rangle$ 是發散數列或收斂數列，若為收斂數列，求其極限值。(4 分)

3. 若對任一正整數 $n \geq n_0$ 都滿足 $a_n > 11.9$ ，求整數 n_0 的最小值。(4 分)

北一女中 ^{111 學年度} 第一學期 第一次期中考 高三 數學科試題 (數甲) 答案卷

高三 ____ 班 座號 ____ 姓名 _____ 得分: _____

一、單選題 (每題 5 分，共 10 分)

1	2

二、多選題

(每題 10 分，共 40 分；錯 1 選項得 8 分，錯 2 選項得 5 分，錯 3 選項得 2 分，錯多於 3 選項 0 分)

3.	4.	5.	6.

三、填充(每格 5 分，共 40 分) ***每一格都應有答案，若無答案，請填寫不存在。

A(1).	A(2).	A(3).	A(4).
A(5).	B.	C.	D.

四、混合題 (共 10 分)

說明：本部分答案必須寫在「答題區」上。若因字跡潦草，未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法辨識，其後果由考生自行承擔。非選擇題必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分，每一題配分標於題末。

北一女中 ^{111 學年度} 第一學期 第一次期中考 高三 數學科試題 (數甲) 參考答案

一、單選題 (每題 5 分，共 10 分)

1	2
5	3

二、多選題

(每題 10 分，共 40 分；錯 1 選項得 8 分，錯 2 選項得 5 分，錯 3 選項得 2 分，錯多於 3 選項 0 分)

3.	4.	5.	6.
34	235	134	12345

三、填充(每格 5 分，共 40 分) ***每一格都應有答案，若無答案，請填寫不存在。

A(1).	A(2).	A(3).	A(4).
不存在	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
A(5).	B.	C.	D.
7	2	(-8,6)	$\frac{45}{2}$

四、混合題 (共 10 分)

假設兩數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，對所有正整數 n 都滿足 $2b_n + \frac{6n-30}{n} < a_n < 4b_n$ 。已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 12$ ，

試回答下列各題。

1. 若 $a_3 = 15$ ，下列何者不可能是 b_3 的值? (2 分)

- (1)3 (2)5 (3)7 (4)9

Ans.(1)

2. 試判斷數列 $\langle b_n \rangle$ 是發散數列或收斂數列，若為收斂數列，求其極限值。(4 分)

Ans.收斂,3

3. 若對任一正整數 $n \geq n_0$ 都滿足 $a_n > 11.9$ ，求整數 n_0 的最小值。(4 分)

Ans.601