

111 學年度第二學期第二次定期考高二數 A 試題

命題範圍：第二章空間中的平面與直線、第三章條件機率

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題：（占 12 分）

每題答對得 6 分；答錯、未作答或劃記多於一個選項，該題得 0 分。

1. 設 A 、 B 為兩獨立事件， $P(A') = \frac{1}{3}$ 且 $P(A' \cup B) = \frac{2}{3}$ ，則 $P(B|A)$ 之值為哪一個選項？ (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{2}{3}$ (5) $\frac{3}{4}$
2. 連續投擲一顆公正骰子 n 次，若要在這 n 次中至少出現 1 次 6 點的機率超過 0.5，則 n 的最小值為哪一個選項？ (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7 (5) 8

二、多選題（占 24 分）

每題有 5 個選項，至少有一個是正確或最適當的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對得 8 分；答錯 1 個選項得 5 分；答錯 2 個選項得 2 分；答錯多於 2 個選項或該題未作答得 0 分。

3. A 、 B 、 C 為三個非空事件，請選出正確的選項。
 - (1) 若 A 與 B 為互斥事件，則 $P(A|C) + P(B|C) = 1$
 - (2) 若 $n(A \cap B) = n(A)P(B)$ ，則 A 、 B 為獨立事件
 - (3) 若 $P(A|B) = P(A)$ ，則 $P(A' \cap B) = P(A')P(B)$
 - (4) 若 $A \cap C$ 為非空事件，則 $n(A \cap B \cap C) = n(C)P(A|C)P(B|A \cap C)$
 - (5) 若 $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ ，則 A 、 B 、 C 為獨立事件
4. 在空間坐標中，設點 $O(0,0,0)$ 、點 $P(1,-2,3)$ 、平面 $E: x-2y+3z=14$ 、平面 $F: x+y+z=1$ 及直線 $L: x-1 = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$ ，已知平面 E 與平面 F 的交線為直線 M 。請選出正確的選項。
 - (1) O 與 P 都在 L 上
 - (2) L 與 E 平行
 - (3) L 與 F 恰交於一點
 - (4) L 與 M 為歪斜線
 - (5) 若 Q 為 P 在 M 上的投影點，則直線 OQ 垂直 M

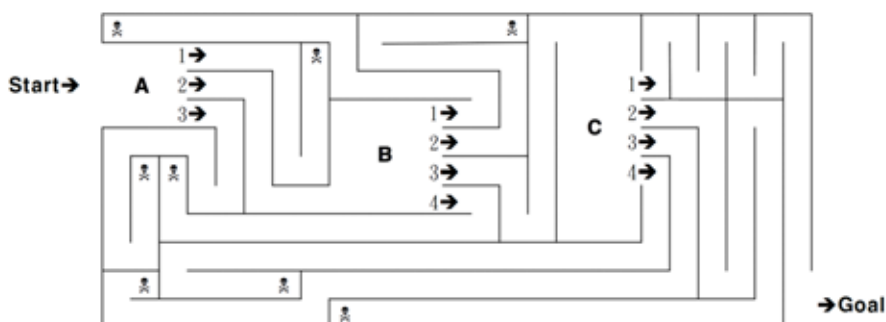
5. 在空間坐標中，設點 $P(2,1,4)$ 、直線 $L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-5}{2}$ 及直線 $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+2}{-2}$ 。已知平面 E 包含直線 L_1 且通過 P 點；一直線 L 通過 P 點且與 L_1 、 L_2 分別交於 A 、 B 兩點。請選出正確的選項。
- (1) L_1 與 L_2 為歪斜線 (2) 直線 L_2 與平面 E 平行 (3) $L \perp L_1$
- (4) A 點的坐標為 $(3,2,5)$ (5) B 點的坐標為 $(-2,5,0)$

三、填充題（占 36 分）

- A. 在空間坐標中，已知平面 $E: -4x + by + cz = d$ 包含兩直線 $L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-3}{1}$ 、 $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ ，其中 b 、 c 、 d 均為實數，則序組 $(b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- B. 在空間坐標中，設平面 $E: y - z = 1$ 與平面 F 的銳夾角為 60° ，且 E 與 F 均通過點 $A(0,0,-1)$ 與點 $B(0,1,0)$ 。已知滿足上述條件的平面 F 之方程式為 $\sqrt{a}x - y + cz + d = 0$ 或 $-\sqrt{a}x - y + cz + d = 0$ ，其中 a 、 c 、 d 均為實數，則序組 $(a, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- C. 袋中有 6 顆白球、1 顆黑球、 n 顆紅球（共 $n+7$ 顆球），每次從此袋中取一顆球，設每顆球被取到的機會均等，取後不放回，共取 3 次。已知前 2 次取出的球都不是白球之機率為 $\frac{2}{15}$ ，則 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- D. 袋中有 7 顆球，其中有 4 顆白球與 3 顆黑球。甲、乙兩人輪流從袋中取球，每次取一顆球，取後不放回，且每顆球被取出的機會均等。若規定由甲開始，則甲先取到黑球的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(答案以最簡分數表示)
- E. 有一個迷宮闖關遊戲共有 **A**、**B**、**C** 三個關卡，分別有 3、4、4 道門，每個關卡都只有一道門可以過關，所有路徑都是不能回頭的單行道，如圖所示。規定參賽者從 **Start** 出發，抵達每一個關卡時均須隨機選擇一道門進入，若途中遇到 ，則表示闖關失敗並停止遊戲；若能依序通過 **A**、**B**、**C** 三個關卡抵達 **Goal**，則表示闖關成功。

小建率先闖關成功，並建議下一位參賽者小國說：「闖關過程中，我都沒有選擇編號最大的門進入。」

小國接受了小建的建議，但很可惜最後還是闖關失敗，則小國是在抵達 C 關卡後才闖關失敗的機率為_____。(答案以最簡分數表示)



- F. 駝客實驗室的研究人員在進行白老鼠免疫實驗時，不慎將兩隻帶有抗體的白老鼠混入原四隻未帶抗體的白老鼠中。為了將那兩隻帶有抗體的白老鼠篩選出來，研究人員決定對這六隻白老鼠逐一檢查(假設每次只檢查一隻，且每次檢查的結果互不影響)，直到能確認帶有抗體的白老鼠是哪兩隻，便停止檢查(不再檢查下一隻)。設研究人員將檢查結果為有抗體的白老鼠以 o 記錄之、未帶抗體的白老鼠以 x 記錄之。舉例說明如下：

舉例 1. 若前三次檢查結果的記錄依序為「oxo」，因為第三次恰檢查出第二隻帶有抗體的白老鼠，便停止檢查。即「oxo」表示檢查 3 次即可確認帶有抗體的白老鼠是哪兩隻的其中一種記錄。

舉例 2. 若前五次檢查結果的記錄依序為「xxoxx」，雖然前五次只檢查出第一隻帶有抗體的白老鼠，但仍可確認剩下還沒檢查的第六隻白老鼠必帶有抗體，便停止檢查。即「xxoxx」表示檢查 5 次即可確認帶有抗體的白老鼠是哪兩隻的其中一種記錄。

舉例 3. 「ooxx」、「oxox」的記錄均不存在，因此均不能視為檢查 4 次即可確認帶有抗體的白老鼠是哪兩隻。

根據以上檢查方式，檢查 4 次即可確認帶有抗體的白老鼠是哪兩隻的機率為_____。(答案以最簡分數表示)

第貳部分、混合題（占 28 分）

一、單選題

本部分共有 2 個題組，其中第 23 與 25 題為多選題，第 24 與 26 題為單選題。

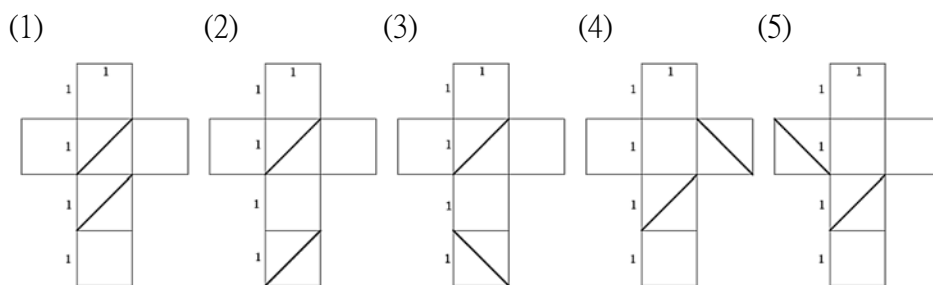
單選題：每題答對得 6 分。

多選題：每題有 5 個選項，至少有一個是正確或最適當的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對得 8 分；答錯 1 個選項得 5 分；答錯 2 個選項得 2 分；答錯多於 2 個選項或該題未作答得 0 分。

題組 1. 已知四面體 $ABCD$ 中， $\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BC} = 1$ 、 $\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{2}$ 、 $\overline{CD} = \sqrt{3}$ 。

設直線 AC 與直線 BD 的距離為 d 。試回答第 23、24 題。

23. 【多選題，8 分】以下將每個選項的平面展開圖均摺疊成邊長為 1 的正立方體。請選出摺疊成正立方體時的兩粗線所在直線之距離為 d 的選項。



24. 【單選題，6 分】承上題， d 之值為

- (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (3) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (5) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

題組 2. 在空間坐標中，設平面 $E: 2x - 2y - z = 0$ ，點 $A(1, 2, -1)$ 、點 $B(2, 0, 1)$ 。

試回答第 25、26 題。

25. 【多選題，8 分】請選出正確的選項。

- (1) A 、 B 在平面 E 的同側 (2) A 、 B 分別到平面 E 的距離之比為 1:3
(3) 直線 AB 與平面 E 垂直 (4) 直線 AB 與平面 E 平行 (5) A 在平面 E 上的投影點為 $(\frac{11}{9}, \frac{16}{9}, \frac{-10}{9})$

26. 【單選題，6 分】若 x 與 y 均為實數，則 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (2x-2y+1)^2} +$

$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (2x-2y-1)^2}$ 的最小值最接近哪個選項？

- (1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{11}$ (3) $\sqrt{12}$ (4) $\sqrt{13}$ (5) $\sqrt{14}$