

臺北市立第一女子高級中學 111 學年度第一學期高二數學(A)期末考自然組試題卷

一、單選題 (30 分)

說明：第 1 至 5 題為單選題，每題答對者得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者得 0 分。

1. 設 $ABCD$ 為平行四邊形，試問下列哪個向量與 $\overrightarrow{AB}$ 相等？

- (1) $\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AD}$ (3) $\overrightarrow{DC}$ (4) $\overrightarrow{DB}$ (5) $\overrightarrow{BA}$

2. 試問行列式 $\begin{vmatrix} 1.2 & 24 \\ 2.2 & 34 \end{vmatrix}$ 之值為下列何者？

- (1) -36 (2) -12 (3) -10 (4) 12 (5) 36

3. 設坐標平面上有兩向量 $\vec{a} = (4, 3)$ ， $\vec{b} = (3, -4)$ ，試問向量 $-4\vec{a} + 3\vec{b}$ 的長度為何？

- (1) 0 (2) 5 (3) $5\sqrt{5}$ (4) 25 (5) $25\sqrt{5}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中，設點 P 及點 Q 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{BP}:\overline{CP} = 2:1$ ， $\overline{BQ}:\overline{CQ} = 7:4$ 。

已知 $\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{AQ} = c\overrightarrow{AB} + d\overrightarrow{AC}$ ，其中 a, b, c, d 為實數，試問下列敘述何者正確？

- (1) $b > d > c > a$ (2) $a > c > d > b$ (3) $d > b > a > c$ (4) $b > c > d > a$ (5) $d > b > c > a$

5. 在坐標平面上，已知向量 $\overrightarrow{AB} = (\log_5 2, -0.7^{-1})$ ，其中點 A 的坐標為 $(\log_{0.2} 7, 2^{-0.5})$ 。試選出正確的選項。

- (1) 點 B 在第一象限 (2) 點 B 在第二象限 (3) 點 B 在第三象限 (4) 點 B 在第四象限 (5) 點 B 位於坐標軸上

二、多選題 (30 分)

說明：第 6 至 8 題為多選題，每題各有五個選項。每個選項 2 分，所有選項均未作答，該題以 0 分計算。

6. 在坐標平面上，設點 $P_k = (k, \sin \frac{k\pi}{2})$ ，其中 k 為自然數，試問下列哪些敘述是正確的？

- (1) $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 1)$ (2) $\overrightarrow{P_2P_4} = \overrightarrow{P_4P_6}$ (3) $\overrightarrow{P_1P_3} \cdot \overrightarrow{P_3P_4} > 0$ (4) $\overrightarrow{P_5P_6} = 0.5\overrightarrow{P_1P_3}$ (5) $\triangle P_1P_3P_6$ 面積的值等於 4

7. 足球場上，潔世一在坐標平面的原點位置，現有三位隊友蜂樂迴、國神鍊介、千切豹馬所在位置分別為 $(1, 1)$ 、 $(2, 3)$ 與 $(4, 1)$ 。潔世一會設定傳球路徑，向點 (a, b) 方向直線傳球，其中 a, b 為正數（形成一射線）。設每位隊友以所在位置為圓心，半徑 1 單位的圓內部(包含邊界)稱為守備範圍，當球進入守備範圍時，隊友可選擇接球或是不接球，試問下列哪些敘述是正確的？

- (1) 傳球路徑會落在通過原點且斜率為 $\frac{a}{b}$ 的直線上 (2) 傳球路徑必定會進入蜂樂迴的守備範圍
(3) 若 $a = b + 1$ ，則傳球路徑可能進入國神鍊介的守備範圍
(4) 潔世一無法找到三位隊友都有機會接球的傳球路徑
(5) 潔世一傳出球後，若千切豹馬接到球，則 $15b \leq 8a$

8. 設 O 為原點，點 A 與點 B 的極坐標分別為 $[2, 30^\circ]$ 與 $[3, 45^\circ]$ ，點 C 在 x 軸負向上，點 D 、點 E 、點 F 、點 G 依序在第一、二、三、四象限內，其中 D 在直線 $y=2x$ 上。已知 $\vec{v}$ 為坐標平面上的向量，且 $\vec{v} \cdot \vec{OA} > 0$ 及 $\vec{v} \cdot \vec{OB} < 0$ ，試問 $\vec{v}$ 與下列哪些向量的內積其值必為負數？

- (1) $\vec{OC}$ (2) $\vec{OD}$ (3) $\vec{OE}$ (4) $\vec{OF}$ (5) $\vec{OG}$

三、選填題 (30 分)

說明：第 A 至 E 題為選填題，每題完全答對得 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 在坐標平面上， $O(0,0)$ ， $B(2,0)$ ， $\overline{OA}=10$ ，若 $\cos \angle AOB = -0.8$ ，則 $\vec{OA}$ 在 $\vec{OB}$ 上的正射影為 (9)(10)(11)。

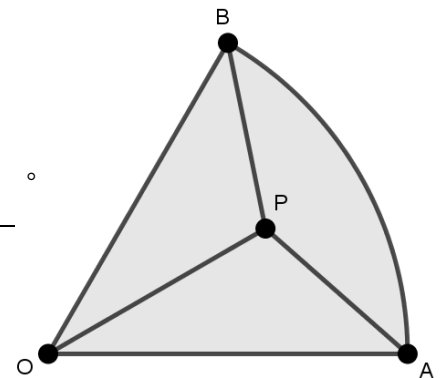
B. 設點 A, B, C, D 在半圓 O 上，且 $\overline{AB}$ 為半圓 O 的直徑， $\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$ ，若 $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BC}=3$ ，則 $\vec{BA} \cdot \vec{BD} =$ (12)(13)。

C. 設坐標平面上有兩點 $A(-4, -5)$ ， $B(-2, -3)$ ，若點 P 為圓 $C: x^2 + y^2 = 1$ 的動點，則 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 的最大值為 (14)(15)。

D. 設 $\vec{a} = (-4, 3)$ ， $\vec{b} = (2, t)$ ，若 $\vec{c} = x\vec{a} + \vec{b}$ ，其中 $-1 \leq x \leq 2$ ， t 為實數，則 $|\vec{c}|$ 的最小值為 (16)。

E. 如圖，設扇形 AOB 的圓心角 $\angle AOB = 60^\circ$ ，且其內部有一點 P ，滿足 $\overline{PO}$ 平分 $\angle AOB$ 。

若 $\overline{OA} = \overline{OB} = 9$ ，且 $\overline{PO}$ ， $\overline{PA}$ ， $\overline{PB}$ 將此扇形面積三等份，則 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} =$ (17) π^2 - (18)(19) $\sqrt{3}\pi + \frac{81}{2}$ 。



四、混合題 (10 分)

說明：1. 甲為單選題答對者得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者得 0 分。

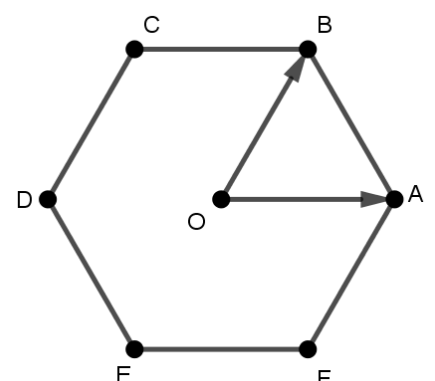
2. 乙為多選題，每題各有五個選項。每個選項 1 分，所有選項均未作答，該題以 0 分計算。

甲、在六邊形 $ABCDEF$ 中，已知 $A(1,0)$ ， $B(0,1)$ ， $C(-1,1)$ ， $D(-1,0)$ ， $E(0,-1)$ ， $F(1,-1)$ 。設 O 為原點， $P(x,y)$ 為 $\triangle OAB$ 內部一點(不包含邊界)，其中 $x > y$ 。試問下列哪個點不可能在四邊形 $CDEF$ 內部(不包含邊界)？(請劃記在第 20 列)

- (1) $Q(y, -x)$ (2) $R(x, y-1)$ (3) $S(x-1, y)$ (4) $T(-y+0.5, -x+0.3)$ (5) $U(x, -y)$

乙、如圖，在正六邊形 $ABCDEF$ 中， O 為 $\overline{CF}$ 中點。設 P 為 $\triangle OAB$ 內部一點(不包含邊界)，且 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$ ，其中 $x > y$ 。已知 Q, R 在同一平面上，且 $\vec{OQ} = y\vec{OA} - x\vec{OB}$ ， $\vec{OR} = x\vec{OA} + (y-1)\vec{OB}$ 。令 $\vec{AB} = \vec{a}$ ， $\vec{BC} = \vec{b}$ ，試問下列哪些敘述是正確的？(請劃記在第 21 列)

- (1) Q 與 R 均在 $\triangle OEF$ 的內部
 (2) $\vec{OQ} = -x\vec{a} + (x-y)\vec{b}$
 (3) $\vec{QR} = (x+y-1)\vec{a} + (-2x+1)\vec{b}$
 (4) 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ ，且 $x = 2y = 0.4$ ，則 $|\vec{QR}|^2 > 0.4$
 (5) $|\vec{OP}|$ 不可能等於 $|\vec{OR}|$



一、單選題 (30 分)

題號	1	2	3	4	5
答案	(3)	(2)	(4)	(1)	(3)

二、多選題 (30 分)

題號	6	7	8
答案	(2) (4)(5)	(2)(3)(4)(5)	(1)(2)(3)

三、選填題 (30 分)

題號	A	B	C	D	E
答案	(-8,0)	14	34	0	$4\pi^2 - 18\sqrt{3}\pi + \frac{81}{2}$

四、混合題 (10 分)

題號	甲	乙
答案	(5)	(1)(2)(3)