

111 學年度第二學期第三次定期考高二數 A 試題

命題範圍：二元一次方程組、三元一次方程組、矩陣的運算、矩陣的應用

一、單選題 (每題 6 分，占 36 分)

1. 非零實數 x, y, z 滿足 $x \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。若 k 是實數使得

$$y = \frac{k}{\begin{vmatrix} 12 & 15 \\ 11 & 16 \end{vmatrix}} z, \text{ 則 } k \text{ 的值等於下列哪一個選項的行列式值？}$$

- (1) $\begin{vmatrix} 12 & 14 \\ 11 & 13 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 13 & 11 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 15 & 14 \\ 16 & 13 \end{vmatrix}$
(4) $\begin{vmatrix} 14 & 15 \\ 13 & 16 \end{vmatrix}$ (5) 以上皆非

2. 坐標平面上直線 L 的方程式為 $x - 3y + 2 = 0$ ，設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 。

已知 A 將 L 上的點映射成直線 L' ，請選出下列哪一個選項是直線 L' 的方程式？

- (1) $x + 3y + 2 = 0$ (2) $5x + 3y - 2 = 0$ (3) $5x - 3y - 2 = 0$
(4) $7x - 3y + 2 = 0$ (5) $7x + 3y + 2 = 0$

3. 坐標平面上，設 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 代表以原點為中心的伸縮變換矩陣，請選出下列正確的選項。

- (1) A 將 $y = x$ 上的點映射成 $y = \frac{2}{3}x$ 圖形
(2) A 將 $y = x^2$ 上的點映射成 $y = \frac{3}{2}x^2$ 圖形
(3) A 將 $y = \sin x$ 上的點映射成一個週期為 π 的函數圖形
(4) 若 A 將 $y = \sin x$ 上的點映射成 $y = g(x)$ 的函數圖形，則當 $x = 5\pi$ 時 $g(x)$ 可發生最大值
(5) 若 A 將 $y = \sin x$ 上的點映射成 $y = g(x)$ 的函數圖形，則直線 $x - 2\pi = 0$ 是 $y = g(x)$ 圖形的對稱軸

4. 下列二階方陣中，請選出滿足「 $A^4 \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 」的選項。

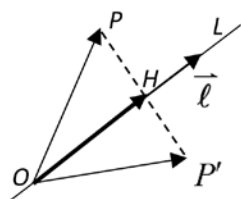
- (1) $A = \begin{bmatrix} \cos 270^\circ & \sin 270^\circ \\ -\sin 270^\circ & \cos 270^\circ \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & -\cos 45^\circ \end{bmatrix}$

$$(3) A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) A = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix}$$

$$(5) A = \begin{bmatrix} -\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & -\cos 45^\circ \end{bmatrix}$$

5. 如右圖，坐標平面上直線 L 過原點 O 且方向向量 $\vec{\ell} = (4, 3)$ ，圖中虛線與 L 垂直。設 A 代表以 L 為鏡射軸的鏡射矩陣（鏡射變換將平面上的 P 點映射到 L 的對稱點 P' ）。定義直線 L 的「正射影變換」，是將平面上的 P 點映射到 L 上的投影點 H 。假設 L 的正射影變換對應的二階方陣為 B 、二階乘法單位方陣為 I ，請選出下列正確的選項。



$$(1) A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$(2) B = I + A$$

$$(3) B^2 = I$$

$$(4) AB = BA$$

$$(5) \det B \neq 0$$

6. 以三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + 5y + 8z = 4 \\ 2x + 3y + 5z = 9 \\ 3x + 4y + 6z = 7 \end{cases}$ 為例，將空間向量

$\vec{a} = (1, 2, 3)$ 、 $\vec{b} = (5, 3, 4)$ 、 $\vec{c} = (8, 5, 6)$ 、 $\vec{d} = (4, 9, 7)$ 用行矩陣表示，

方程組可寫成 $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$ ，即 $x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$ 。

將下列選項中的 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ 用行矩陣表示後得到方程組

$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$ ，試問哪一個選項的解 (x, y, z) 有無限多組實數解。

（選項中 $\vec{a} + \vec{b}$ 、 $\vec{a} - \vec{b}$ 、 $\vec{a} \times \vec{b}$ 分別代表空間向量的加法、減法、外積運算，經運算後再用行矩陣表示）

$$(1) \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \vec{d} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$(2) \vec{a} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \vec{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$(3) \vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \vec{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(4) \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 31 \\ 34 \\ 37 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$(5) \vec{a} = \begin{bmatrix} 41 \\ 52 \\ 63 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 81 \\ 26 \\ 59 \end{bmatrix}, \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

二、多選題(每題 8 分，占 40 分)

說明：每題至少有一個正確或最適當的選項，每個選項均獨立判定，所有選項均答對者得 8 分，答錯 k 個選項者得 $8-3k$ 分，但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設 k, ℓ 是實數， x, y, z 的三元一次聯立方程式
$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 2x + y - 3z = \ell \\ 3x + y + kz = -7 \end{cases},$$

已知其增廣矩陣
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & \ell \\ 3 & 1 & k & -7 \end{bmatrix}$$
 經列運算可得
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$
 (其

中 a, b, c, d, e 是實數)，請選出下列正確的選項。

- (1) k 的值必為 -5
 - (2) 若 ℓ 等於 -8 ，則方程組有無限多解
 - (3) a 的值必為 -2
 - (4) 若方程組有解，則 $(1, 2, 4)$ 可能是方程組的一解
 - (5) 若方程組有解，則 $(-1, 1, 1)$ 可能是方程組的一解
8. 已知手機的作業系統僅兩種：第 1 種是 Android、第 2 種是系統 iOS。某個搜尋網站每年統計手機使用者是經由哪一種進入網站，今年 Android 使用者占 80%、iOS 使用者占 20%。依照以往經驗知：「原 Android 使用者中每年有 30% 改換成 iOS 用戶 (70% 沿用 Android)，原 iOS 使用者中每年有 20% 改換成 Android 用戶 (80% 沿用 iOS)」。若搜尋網站的流量每年不變，用此經驗推估用戶是以何種作業系統進入網站，設轉移矩陣 $A = [a_{ij}]$ ，其中 a_{ij} 是每年由第 j 種作業系統轉移成第 i 種作業系統的機率 ($i = j$ 是指系統不變)。設 n 年後以 Android 進入網站的比例為 p_n (n 是正整數)，請選出下列正確的選項。

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

(2) 一年後以 Android 進入網站的比例 p_1 大於 0.6

(3) 兩年後以 Android 進入網站的比例 p_2 等於 0.5

(4) 定義 $b_n = p_n - 0.4$ (n 是正整數), 則 $\langle b_n \rangle$ 是一等比數列

(5) $\langle p_n \rangle$ 是一遞減數列

9. 坐標平面上, 設 A 、 B 分別代表以原點為中心, 逆時針旋轉 90° 、順時針旋轉 90° 的旋轉矩陣; C 、 D 分別代表以直線 $y=0$ 、 $x+y=0$ 為鏡射軸的鏡射矩陣。請選出下列正確的選項。

(1) $DC = A$ (2) $DB = C$ (3) BC 是旋轉矩陣

(4) 將 $y = \log_2 x$ 的圖形, 先經 B 映射再經 C 映射, 則可得到 $y = 2^x$ 的圖形 (5) 將 $y = \log_2 x$ 的圖形, 先經 C 映射再經 A 映射, 則可得到 $y = 2^x$ 的圖形

10. 方陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 、 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$ 。請

選出下列正確的選項。

(1) $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (2) $A^3 = 3A$ (3) $A^8 = -27A^2$

(4) 若 $M = aI + bA + cA^2$, 其中 a, b, c 是實數, 則 $b = 0$

(5) 若 $M = aI + bA + cA^2$, 其中 a, b, c 是實數, 則 $c = \frac{1}{2}$

11. 設 x, y, z 的三元一次聯立方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$, 定義以原

點為起點的四個向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 、

$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 、 $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$, 若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均為非零向量, 請選出下列正確的選項。

(1) 若方程組無解, 則 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三向量平行且 $\vec{d}$ 與這三者不平行

(2) 若方程組有無限多解, 則 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三向量必在同一平面上

(3) 若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 四向量在同一平面上, 則方程組有無限多解

- (4) 若向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 在同一平面上且 $\vec{d} = \vec{0}$ ，則方程組有無限多解
- (5) 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 不平行且 $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ，若方程組有解且將其解 (x, y, z) 標在空間坐標系，則形成方向向量為 $(-2, 1, 1)$ 的一直線

三、填充題(每題 8 分，占 24 分)

- A. 二階方陣 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ，設 $A^5 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (其中 a, b, c, d 是實數)，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- B. 一礦物內含 A 、 B 、 C 三種放射性物質，放射出同一種輻射。已知 A 、 B 、 C 每公克分別會釋放出 1 單位、2 單、 $\frac{1}{2}$ 單位的輻射強度，又知 A 、 B 、 C 每過半年其質量分別變為原來質量的 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 倍。於一年前測得此礦物的輻射強度為 53 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 21 單位，且目前此礦物的輻射強度為 9 單位，則目前此礦物中 A 物質的質量為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 公克。
- C. 二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 、 $A \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$ ，已知二階方陣 B 滿足 $AB = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ，設 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (其中 a, b, c, d 是實數)，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。