

111 學年度第一學期第二次定期考高二數 A 試題

命題範圍：第二章 指數與對數函數

一、多選題(佔 16 分)

說明:每題至少有一個選項是正確。每題全部答對得 8 分，只錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或均未作答者不給分。

1. 設函數 $f(x) = \log_a x$ ，其中 $a > 0, a \neq 1$ 。請選出正確的選項。

(1) 給定相異正數 x_1, x_2 ，則 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{1}{2}\{f(x_1) + f(x_2)\}$ 。

(2) 給定相異正數 x_1, x_2 ，則 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), C(x_2, f(5x_2)), D(x_1, f(5x_1))$ 四點必為平行四邊形。

(3) 函數 $y = f(x)$ 的圖形必以 y 軸為漸近線，且通過 $(0, 1)$ 。

(4) 對任意實數 k ，方程式 $f(x) + x - k = 0$ 均恰有一實根。

(5) 當 $a = 10$ 時，函數 $y = f(x)$ 的圖形有兩點 $P(t, f(t)), Q(s, f(s))$ ，已知直線 $\overline{PQ}$ 的斜率為 $\frac{1}{5}$ ，且 $s - t = 10$ ，則 $s + t = \frac{1010}{99}$ 。

2. 設函數 $f(x) = 2^x$ ， $g(x) = 5 \times 2^x$ 。請選出正確的選項。

(1) 給定相異實數 x_1, x_2 ，則 $\frac{1}{2}\{g(x_1) + g(x_2)\} > g(\frac{x_1+x_2}{2})$ 。

(2) 給定相異正數 $t_1 > t_2$ ，若直線 $y = t_1$ 與函數 $y = f(x), y = g(x)$ 的圖形分別交於 P_1, Q_1 兩點；直線 $y = t_2$ 與函數 $y = f(x), y = g(x)$ 的圖形分別交於 P_2, Q_2 兩點，則 $P_1 Q_2 P_2 Q_1$ 四點必為平行四邊形。

(3) 函數 $y = g(x)$ 的圖形必以 x 軸為漸近線，且通過 $(0, 1)$ 。

(4) 對任意實數 k ，方程式 $f(x) + x - k = 0$ 均恰有一實根。

(5) $f(100)$ 和 $g(100)$ 有相同的位數。(已知 $\log 2 \approx 0.3010$)

二、填充題(佔 74 分)

說明：「答對格數」與得分對照表如下：

答對格數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得 分	0	7	14	20	26	32	37	42	47	52	56	60	64	68	71	74

1. 函數 $y=4^x$ 與 $y=2^{x+2}$ 圖形的交點坐標為_____。
2. 函數 $y=5\times 4^x$ 與 $y=2^{3x+2}$ 圖形的交點坐標為_____。
3. 方程式 $5\times 4^x - 2^{x+2} - 9 = 0$ 的解為_____。
4. 不等式 $4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} \geq 9^x + 9^{x+1} + 9^{x+2}$ 的解為_____。
5. 設實數 a, b 且 $b > 0, b \neq 1$ ，下表是函數 $f(x) = a + \log_b x$ 的 4 個函數值：

x	0.25	2	4	32
$f(x)$	m	n	$10-m$	$n+4$

則數對 $(m, n) =$ _____。

6. 坐標平面上，直線 $x=2$ 與函數 $y=\log_{16} x, y=\log_2 x$ 的圖形分別交於 P, Q 兩點；直線 $x=16$ 與函數 $y=\log_{16} x, y=\log_2 x$ 的圖形分別交於 R, S 兩點，則四邊形 $PQSR$ 面積為_____。
7. 假設光線通過一塊透明板，它的強度就會減弱一成。如果要把 n 塊相同的透明板重疊一處，使通過這 n 塊透明板的光線強度是原來光線強度的 $\frac{1}{1000}$ 以下，則 n 的最小值為_____。(已知 $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771$)
8. 設函數 $y=2^x$ 的圖形與斜率為 $\frac{1}{3}$ 的直線相交於 A, B 兩點， A, B 兩點的 x 坐標分別為 $a, b (a < b)$ ，已知 $\overline{AB} = 3\sqrt{10}$ 且 $n \leq a < n+1$ ， n 為整數，則 $n =$ _____。
9. 給定實數 a, α, β 且 $a > 0, a \neq 1$ ，函數 $f(x) = \frac{a^x + 2a^{-x}}{a^x - 2a^{-x}}$ 。若 $f(\alpha) = 9, f(\beta) = 7$ ，則

$f(\alpha + \beta) =$ _____。10. 當 $\frac{1}{100} \leq x \leq 1000$ 時，則函數 $f(x) = x^{3-\log x}$ 的最小值 =

- _____。
11. 設 x_0, y_0 為正實數。若坐標平面上的點 $(10x_0, 15y_0)$ 在函數 $y = 10^x$ 的圖形上，則點 $(x_0, \log y_0)$ 會在直線 $y = ax + b$ 的圖形上，其中 a, b 為實數。試問 a^b 的值為_____。
12. 二十項實數數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ 的每一項都大於 1，且每相鄰的兩項中，都有一數是另一數的兩倍。若 $a_1 = \log_{10} 360$ ，則 a_{20} 的可能的值有_____種。
13. 連續投擲一公正骰子三次，設出現的點數依序為 a, b, c ，則發生 $\log(a^3) + \log(b^2) + \log c \leq 2$ 的機率為_____。
14. 方程式 $2^{2x} + (m-8)2^x + 9 = 0$ 有兩相異正根，則實數 m 的範圍為_____。
15. 坐標平面上有一點 $A(-4, 3)$ ，若 P, Q 兩點分別為指數函數 $f(x) = 2^x$ 與對數函數 $g(x) = \log_2 x$ 之圖形上的點，且 P, Q 兩點對稱於直線 $y = x$ ，則 $\overline{AP} + \overline{AQ}$ 之最小值為_____。

三、計算題(佔 10 分)

說明:每小題 5 分，合計 10 分，未寫計算過程不計分

1. 一杯 360 ml 黑咖啡含有 100 mg 的咖啡因，假設咖啡因以每小時 15% 的速度從人體代謝出去。設喝一杯黑咖啡 t 小時後人體含有 $f(t)$ mg 的咖啡因。
- (1) 請寫出 $f(t)$ 與 t 的關係式。
- (2) 使用 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 17 \approx 1.2304$ ，求此咖啡因的半衰期。(四捨五入至小數點後第一位)