

111 學年度第一學期第一次定期考高二數 A 試題

命題範圍：第一章 三角函數

一、多選題(每題 9 分，共 36 分)

每題有 5 個選項，其中至少一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 9 分；答錯 1 個選項者，得 6 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 設 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ，且 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，請選出正確的選項。

(1) $\cos \theta = \frac{4}{5}$ (2) $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (3) $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$ (4) $\tan 2\theta = \frac{24}{7}$

(5) $\sin 3\theta = \frac{117}{125}$

2. 關於函數 $f(x) = \sin x - \cos x$ 的圖形，請選出正確的選項。

(1) 週期為 π (2) 振幅為 1 (3) 對稱於直線 $x = \frac{\pi}{2}$

(4) 與直線 $y = \frac{\sqrt{2}}{\pi}x$ 有三個交點 (5) 對稱於點 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

3. 請選出正確的選項。

(1) 將 $y = \sin x$ 的圖形鉛直方向伸縮 2 倍可得 $y = \frac{1}{2} \sin x$ 的圖形

(2) 將 $y = \sin x$ 的圖形對稱 x 軸可得 $y = -\sin x$ 的圖形

(3) 將 $y = \sin x$ 的圖形水平方向伸縮 $\frac{1}{3}$ 倍可得 $y = \sin \frac{x}{3}$ 的圖形

(4) 將 $y = \sin x$ 的圖形先向左平移 $\frac{\pi}{18}$ 單位，再水平方向伸縮 $\frac{1}{3}$ 倍後可得 $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的圖形

(5) 將 $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的圖形先向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位，再向上平移 1 單位後可得 $y = \sin 3x + 1$ 的圖形

4. 設函數 $f(x) = \frac{\sin \pi x}{x^2 - x + \frac{5}{4}}$ ，其中 x 為實數，請選出正確的選項。

(1) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ (2) $f(x) \leq 1$ (3) 曲線 $y = f(x)$ 有對稱軸 (4) 曲

線 $y = f(x)$ 對原點對稱

(5) 當 $-2 < x < -1$ 時， $f(x) < 0$

二、填充題(每題 6 分，共 54 分)

每題完全答對得 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

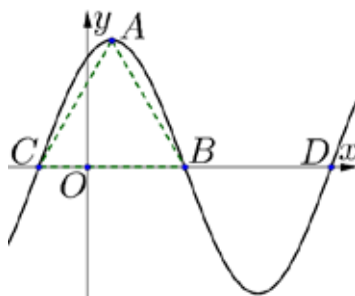
5. 已知扇形的半徑為 π ，弧長為 2，則此扇形的面積為_____。

6. 設直線 $L_1: 2x - y - 2022 = 0$ 與直線 $L_2: ax + 3y + 2022 = 0$ 的銳夾角為 45° ，則實數 $a =$ _____。(有兩解)

7. 設 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ， $90^\circ < \beta < 180^\circ$ ，且 $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ ， $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，

則 $\alpha + \beta$ 的度數為_____。

8. 函數 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin\left(ax + \frac{\pi}{3}\right)$ ($a > 0$) 在一個週期內(由 C 點到 D 點)的圖形如下圖所示，其中 O 為原點， A 為此週期內的最高點， B 、 C 、 D 為圖形與 x 軸的交點，且 $\triangle ABC$ 為正三角形，則 a 之值為_____。

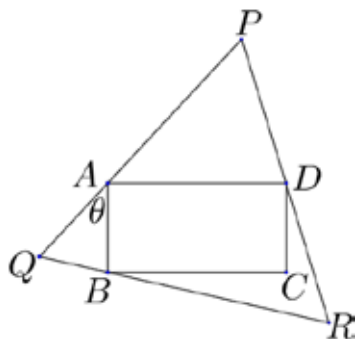


9. 設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，則 $2 \sin \theta (\sin \theta + \cos \theta)$ 的最大值為_____。

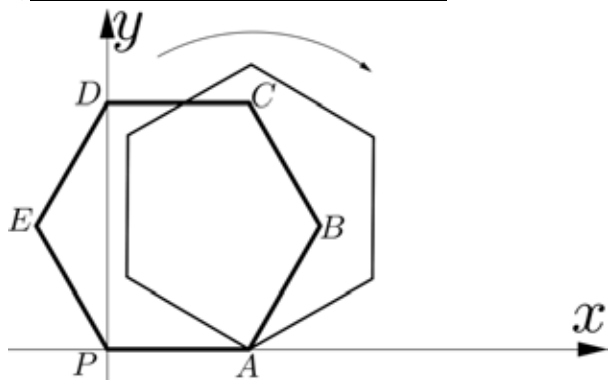
10. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{7}$ ， $\overline{AC} = 2\sqrt{7}$ ，且 $\angle B - \angle C = \frac{2}{3}\pi$ ，
則 $\overline{BC} =$ _____。

11. 設方程式 $\sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{6} \sin 2x = 1$ ，且 x_1 及 x_2 為滿足此方程式之兩解，其中 $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\tan(x_1 + x_2)$ 之值為_____。

12. 如右的示意圖，已知長方形 $ABCD$ 內接於正三角形 PQR ，其中 A 在 $\overline{PQ}$ 上，
 B 在 $\overline{QR}$ 上， D 在 $\overline{PR}$ 上，(長方形的邊也可以在正三角形的邊上)，設 $\angle BAQ = \theta$ ，
且 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ，若 $\overline{AD} = 3\sqrt{3}$ ， $\overline{AB} = 3$ ，
則 $\overline{PQ}$ 的最大值為_____。



13. 坐標平面上，有一邊長為 2 的正六邊形 $PABCDE$ 實心木板，其中兩頂點 $P(0,0)$ 與 $A(2,0)$ ，將此木板放在 xy 平面上且沿 x 軸正向滾動，過程中只看頂點 $P(x,y)$ 移動的軌跡，當點 P 坐標為 $(12,0)$ 時，求點 P 的軌跡所在的曲線與 x 軸所圍成封閉區域的面積為_____。



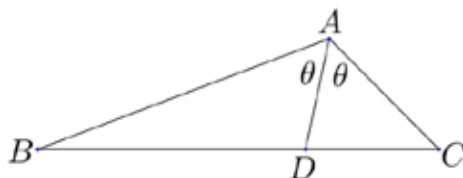
三、計算證明題(每題 10 分，共 10 分)

請寫出計算或證明過程，否則不予計分。

14. 如右的示意圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 2\overline{AC}$ ，

點 D 在 $\overline{BC}$ 上， $\angle BAD = \angle CAD = \theta$ ，

其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，設 $\overline{AD} = k\overline{AC}$ ，



試回答下列各小題：

- (1)由 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 的面積和等於 $\triangle ABC$ 的面積可推得

$$k = u \sin \theta + v \cos \theta, \text{ 其中 } u、v \text{ 為常數，試求數對 } (u, v)。 \quad (3 \text{ 分})$$

- (2)求實數 k 的取值範圍。 (3 分)

- (3)若 $\triangle ABC$ 的面積為 1，試求 $\overline{BC}$ 的最小值及此時的 k 值。 (4 分)