

一、 單選題 (每題 5 分, 共占 15 分)

1. 已知隨機變數 $X \sim G(\frac{1}{6})$, 且 μ 為期望值 $E(X)$, σ 為標準差 $\sigma(X)$ 。現重複投擲一個骰子, 直到出現 1 點才停止。若第 n 次才出現 1 點, 當 $n \leq \mu + 2\sigma$, 即判定此骰子出現 1 點的情形是公正的, 否則判定為不公正, 將 n 值納入拒絕域。下列哪個選項為拒絕域中的最小值?

(1) 15 (2) 16 (3) 17 (4) 18 (5) 19

2. xy 平面上, 方程式 $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ 的圖形和 $y^2 = x + 3$ 的圖形共有幾個相異交點?

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個

3. 已知點 P 在方程式 $\Gamma: (4x+3y)(4x-3y)=144$ 的圖形上, 相異兩直線 L_1 和 L_2 為 Γ 的漸近線, 且 $d(P, L)$ 表示點 P 到直線 L 的距離。下列哪個選項為 $d(P, L_1) \times d(P, L_2)$ 的值?

(1) $\frac{25}{144}$ (2) $\frac{144}{25}$ (3) $\frac{5}{12}$ (4) $\frac{12}{5}$ (5) $\frac{36}{25}$

二、 多選題 (每題 10 分, 共占 40 分)

4. 某百貨公司舉辦「來店一路發」活動, 凡來店登記, 當日每人就可參加一次, 不限人數。活動方法是參與者每次從箱中抽取一球, 看看是否取中 8 號球後放回箱中, 共取三回, 第一回就取中可得 4 張折價券, 第二回才取中可得 3 張, 第三回才取中得 2 張, 三回都沒取中亦可得一張, 每回獲得折價券即停止, 不再抽取。

已知箱中有 1 號球 1 個, 3 號球 3 個, ..., $2k-1$ 號球 $2k-1$ 個 ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 8$), 以及 8 號球 8 個。假設取球時, 箱中各球被取中機會均等, 當日活動第一位獲得 4 張折價券的是第 X 位活動參與者, 當日參與一次活動所得的折價券張數為 Y 。下列哪些選項是正確的?

- (1) 箱中共有 72 個球
 (2) 期望值 $E(X) = 9$
 (3) 正整數 m, n 滿足 $m+n=5$ 時, 機率 $P(X=m) = P(Y=n)$
 (4) 正整數 m, n 滿足機率 $P(X=m) = P(Y=n)$ 時, $m+n=5$
 (5) 機率 $P(X \geq 4) = P(Y=1)$

5. 下列哪些選項在 xy 平面上的圖形為圓、橢圓、雙曲線或拋物線?

(1) $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|3x+4y-7|}{5}$

(2) $\begin{cases} x=t \\ y=2t^2-t+4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

(3) $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+5)^2 + (y+7)^2} = 18$

(4) $\left| \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(x+5)^2 + (y+7)^2} \right| = 10$

(5) $(x-1)(x-3) + (y-2)(y-6) = 0$

6. 依方程式 $\sqrt{(x-6)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|x+6|$ 化簡後所得的式子, 判別它在坐標平面上所成的圖形, 可得知下列哪些選項是正確的?

- (1) 此圖形為拋物線
- (2) 直線 $y=0$ 可為其對稱軸
- (3) $(6,0)$ 可為其焦點
- (4) $(2,0)$ 可為其頂點
- (5) 圖形正焦弦長為 24

7. 平面上, 圓 C 以雙曲線 Γ 的中心為圓心, 且和 Γ 交於相異四點 A 、 B 、 C 、 D 。令 F_1 、 F_2 為 Γ 的兩焦點。下列哪些選項是正確的?

- (1) 若 Γ' 為 Γ 的共軛雙曲線, 則 F_1 、 F_2 和 Γ' 的兩焦點會四點共圓
- (2) 可以找到拋物線, 其圖形完全落在 Γ 上
- (3) 以 A 、 B 、 C 、 D 四點為頂點的凸四邊形必為矩形
- (4) 當四邊形 $ABCD$ 為正方形時, Γ 的實軸長、共軛軸長相等
- (5) 當六邊形 ABF_1CDF_2 為正六邊形時, Γ 的實軸長、共軛軸長一定不相等

三、 填充題 (每題 6 分, 共占 30 分)

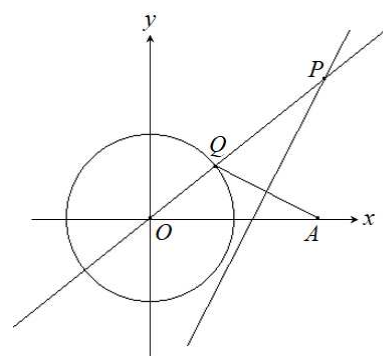
8. 等腰三角形 ABC 中, $\overline{AB} = \overline{AC} = 2$, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, 若拋物線 Γ 以 A 點為頂點, 且通過 B 、 C 兩點, 則 Γ 的焦距為 _____。

9. 坐標平面的橢圓 $\frac{(x-7-2\sqrt{5})^2}{20} + \frac{(y-6)^2}{16} = 1$ 上有 _____ 個點到點 $A(0,6)$ 的距離為整數。

10. 坐標平面上, 動點 P 在橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上移動, 若動點 P 的坐標為 (a,b) 時, P 到直線 $3x+3y-25=0$ 的距離有最小值 c , 則序對 (a,b,c) 為 _____。

11. 設 m 、 n 為正實數, 雙曲線 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = 1$ 的兩焦點為 $F_1(2\sqrt{3},0)$ 與 $F_2(-2\sqrt{3},0)$ 。若此雙曲線通過 A 、 B 兩點使三角形 F_2AB 為正三角形, 其中 $\overline{AB}$ 為過 F_1 的正焦弦, 則序對 (m,n) 為 _____。

12. 右圖中的圓以原點 O 為圓心、半徑為 4，點 A 的坐標為 $(8,0)$ ，動點 Q 在圓上移動。若點 P 為線段 AQ 的中垂線與直線 OQ 的交點，則點 P 的軌跡方程式為_____ (請以標準式作答)。



四、混合題或非選擇題 (占 15 分)

說明：本部分共有 2 題組，各題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

13-15 題為題組

對於所有自然數 n ，令 Γ_n ， Ω_n 分別代表方程式 $\frac{x^2}{n^2} + y^2 = 1$ 和 $x^2 - \frac{y^2}{n^2} = 1$ 在 xy 平面上所得的圖形，試回答下列問題。

13. 下列哪些選項可能為 Γ_n 和 Ω_n 的交點個數？(選擇題，1 分)

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4

14. 當 $n \geq 2$ 時，令點 (a_n, b_n) 為 Γ_n 和 Ω_n 在第一象限的交點坐標。試求出 a_n 的一般式。(非選擇題，2 分)

15. 承上題，令 l_n 代表 (a_n, b_n) 到原點的距離。試求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ 之值。(非選擇題，3 分)

16-18 題為題組

2023 年 1 月，台積電傳出 3 奈米晶片生產良率高達 8 成，狠甩同業，引起全球關注。若妳有一次機會可以到生產線上逐一檢測此製程剛生產出來的晶片，直到檢測出不良的晶片即停止。令隨機變數 X 代表此次檢測的次數，且檢測時不會發生誤檢的情況，試回答下列問題。

16. 若此生產良率的說法屬實，則期望值 $E(X)$ 為何？(單選題，2 分)

(1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{5}{4}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4) 5 (5) 以上皆非

17. 承上題，試求出機率 $P(X \leq k)$ 之一般式，其中 k 為正整數。(非選擇題，3 分)

18. 承上題，若機率 $P(X > k)$ 小於 0.05，則判定「生產良率高達 8 成」非屬實。試求此生產良率的說法被判定為非屬實時， k 的最小值。(非選擇題，4 分)

參考數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$

班級:_____ 座號:_____ 姓名:_____

一、 單選題 (每題 5 分，共占 15 分)

1.	2.	3.

二、 多選題 (每題 10 分，共占 40 分)

4.	5.	6.	7.

三、 填充題 (每題 6 分，共占 30 分)

8.	9.	10.
11.	12.	

四、 混合題或非選擇題 (共占 15 分)

13. _____(選擇題，1 分)	16. _____(單選題，2 分)
14. (非選擇題，2 分)	17. (非選擇題，3 分)
15. (非選擇題，3 分)	18. (非選擇題，4 分)

班級:_____ 座號:_____ 姓名:_____

一、 單選題 (每題 5 分，共占 15 分)

1.	2.	3.
(3)	(4)	(2)

二、 多選題 (每題 10 分，共占 40 分)

4.	5.	6.	7.
(1)(2)(4)(5)	(2)(3)(5)	(2)(3)(4)	(1)(3)(5)

三、 填充題 (每題 6 分，共占 30 分)

8.	9.	10.
$\frac{3}{4}$	17	$(\frac{9}{5}, \frac{16}{5}, \frac{5\sqrt{2}}{3})$
11.	12.	
(4,8)	$\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$	

四、 混合題或非選擇題 (占 15 分)

13. <u>(3)(5)</u> (選擇題，1 分)	16. <u>(4)</u> (單選題，2 分)
14. (非選擇題，2 分) $\sqrt{\frac{n^2(n^2+1)}{n^4+1}}$	17. (非選擇題，3 分) $1-(\frac{4}{5})^k$
15. (非選擇題，3 分) $\sqrt{2}$	18. (非選擇題，4 分) 14