

111 學年度第二學期第一次定期考高三數甲試題

命題範圍：二次曲線

一、單選題（每題 6 分，共 18 分）

1. 坐標平面上，方程式 $\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2} = \frac{|x+2y-2|}{\sqrt{5}}$ 所代表的圖形名稱為
(A)一直線 (B)一圓 (C)一拋物線 (D)一橢圓 (E)一雙曲線。
2. 在坐標平面上給定兩點 $A(-1, 2\sqrt{3})$ 與 $B(2, -\sqrt{3})$ ，則下列何者是『錯誤的』？
(A) 若動點 P 滿足 $\overline{AP} + \overline{BP} = 8$ ，則 P 的軌跡為一橢圓。
(B) 若動點 P 滿足 $\overline{AP} + \overline{BP} = 6$ ，則 P 的軌跡為一線段。
(C) 若動點 P 滿足 $|\overline{AP} - \overline{BP}| = 4$ ，則 P 的軌跡為雙曲線。
(D) 若動點 P 滿足 $|\overline{AP} - \overline{BP}| = 6$ ，則 P 的軌跡為一射線。
(E) 若動點 P 滿足 $\overline{AP} - \overline{BP} = 0$ ，則 P 的軌跡為一直線。
3. 求 $\sqrt{(x-3)^2+(x^2-2)^2} - \sqrt{x^2+(x^2-1)^2}$ 的最大值為何？
(A) 1 (B) 3 (C) $\frac{7}{2}$ (D) $\sqrt{10}$ (E) $\sqrt{13}$ 。

二、多選題（每題 8 分，共 40 分）

每題全對得 8 分，錯一選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個選項以上得 0 分

1. 下列有關方程式圖形的敘述，那些是正確的？
(A) 方程式 $(2x-3y+1)(x+2y-1)=0$ 的圖形為兩相交直線
(B) 方程式 $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} = 4$ 的圖形為一橢圓
(C) 方程式 $\sqrt{(x+4)^2+y^2} - \sqrt{(x-4)^2+y^2} = 5$ 的圖形為雙曲線中比較靠左邊焦點的一支

(D) 兩曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$ 與 $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{3} = 1$ 有共同的焦點

(E) 兩直線 $L_1: x + 2y + 1 = 0$, $L_2: x - 2y - 3 = 0$

若 $d(P, L_1) \times d(P, L_2) = 5$, 則 P 點的軌跡為一對共軛雙曲線

2. 在坐標平面上, 下列哪些直線與雙曲線 $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$ 『不』相交?

(A) $y = 2x$ (B) $y = 3x$ (C) $y = 4x$ (D) $y = -4x$ (E) $y = -2x + 1$

3. 二次曲線 Γ 的方程式為 $2x^2 - y^2 - 4x + 4y = 0$, 則下列哪些選項是正確的?

(A) 點 $(1, 2)$ 是 Γ 的中心 (B) 點 $(2, 2)$ 是 Γ 的一個頂點

(C) 點 $(1, 2 - \sqrt{3})$ 是 Γ 的一個焦點 (D) Γ 的漸近線斜率為 $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

(E) Γ 的正焦弦長為 $\sqrt{2}$

4. 已知 $A(-2, 2)$, 若 B 是橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上一動點, 且 F 是左焦點, 則下列選項中哪些是 $\overline{AB} + \overline{BF}$ 可能的值?

(A) 4 (B) 9 (C) 15 (D) 18 (E) 21

5. 若以原點為中心, 將雙曲線 $\Gamma_1: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 逆時針旋轉 30° 得到曲線

$\Gamma_2: ax^2 + bxy + cy^2 - 576 = 0$, 且 Γ_2 上的任意一點 $Q(x, y)$ 由 Γ_1 上的一點 $P(m, n)$ 旋轉而來, 則下列哪些選項是正確的?

(A) 以原點為中心逆時針旋轉 30° 所對應的旋轉矩陣為 R ,

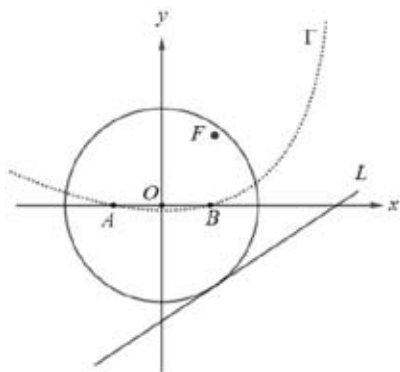
$$\text{則 } R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

(B) P 點的 x 坐標為 $m = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y)$

(C) P 點的 y 坐標為 $n = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y)$ (D) $a = 11$ (E) $c = 37$

三、填充題（每格 6 分，共 30 分）

- 設方程式 $\frac{(x+1)^2}{3-t} + \frac{(y-2)^2}{5+2t} = 1$ 表示長軸在直線 $y-2=0$ 上之橢圓，則 t 的範圍為_____。
- 已知 B 點是橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 短軸上的一個頂點，若 P 點在 Γ 上，則 $\overline{PB}$ 的最大值為_____。
- 設 F_1 、 F_2 為橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的兩個焦點， P 為橢圓上一點，已知 $\angle PF_2F_1 = 90^\circ$ 且 $\overline{PF_1} > \overline{PF_2}$ ，則 $\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PF_2}}$ 之值為_____。
- 設 k 為一實數，若 $\Gamma: \frac{x^2}{k-13} + \frac{y^2}{k-4} = 1$ 的圖形為過點 $(1, 2\sqrt{2})$ 的雙曲線，則其斜率為正的漸近線方程式為_____。
- 已知坐標平面上有 $A(-1,0)$ 、 $B(1,0)$ 兩點，與圓 $C: x^2 + y^2 = 4$ ，以圓 C 的切線為準線通過 A 、 B 兩點作拋物線時，可以發現不同的切線會得到不同的拋物線(示意圖如右圖)，求這些拋物線『焦點』的軌跡會滿足的方程式為_____ ($y \neq 0$)。



四、計算題：12%

設拋物線 $\Gamma: y^2 = 4cx$ ($c > 0$) 的焦點為 F ， $\overline{AB}$ 為焦弦 (經過 F 點的直線交拋物線於 A 、 B 兩點)，若 C 點在拋物線的準線 L 上且滿足 $\overline{BC}$ 平行 x 軸，若 $\overline{AC}$ 與 x 軸交於 V 點，證明： V 點是拋物線 Γ 的頂點。