

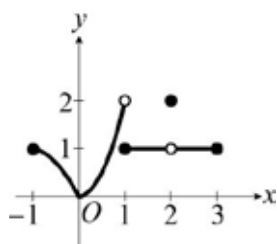
111 學年度第一學期第二次定期考高三數乙試題

命題範圍：選修數學乙(上)第二章微分

一、多選題（每題 8 分，5 題共 40 分）

（說明：每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。）

1. 若函數 $y = f(x)$ 在 $-1 \leq x \leq 3$ 的定義如圖，則下列敘述何者為真？

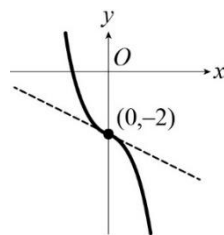


- (1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ (2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 不存在 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
(4) $f'(-\frac{1}{2}) > 0$ (5) $f'(0) = 0$

2. 設 $f'(x)$ 表示實係數多項式函數 $f(x)$ 的導函數，已知 $y = f'(x)$ 的圖形是一個通過點 $(-1, 0)$ 和點 $(2, 0)$ 且開口向下的拋物線，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $f(x)$ 是三次多項式函數 (2) $f(x)$ 在 $-1 < x < 2$ 的範圍內為遞減函數
(3) $f(x)$ 恰有兩個極值 (4) 若 $f(-1)f(2) < 0$ ，則 $f(x)$ 在區間 $(-1, 2)$ 內沒有實根
(5) 若 $f(-1)f(2) > 0$ ，則 $f(x) = 0$ 只有一個實根

3. 如圖為三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形，其中點 $(0, -2)$ 為圖形的反曲點，虛線為過反曲點的切線。選出正確的選項。



- (1) $a < 0$ (2) $b < 0$ (3) $c < 0$ (4) $d < 0$ (5) $b^2 - 3ac < 0$

4. 設函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，若曲線 $y = f(x)$ 上，以 $(2, -10)$ 為切點的切線斜率為最小，且此時之切線通過原點，下列何者為真？

(1) $a + b + c = 10$ (2) $a + b + c = -7$ (3) 最小斜率為 -5

(4) 切線方程式為 $5x + y = 0$ (5) 法線方程式為 $x - 5y = 0$

5. 設 $f(x) = ax^4 - 4ax^3 + b$ ($a > 0$)， $1 \leq x \leq 4$ 時的最大值為 3，最小值為 -6 ，

則 (1) $a = \frac{1}{2}$ (2) $b = \frac{1}{2}$ (3) $a = \frac{1}{3}$ (4) $ab = 1$ (5) $b < 1$

二、填充題（每題 7 分，6 題共 42 分）

1. 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1) = 0$ 及 $f'(1) = -15$ ，求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{3h}$ 的值 = ____。

2. 設 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq -1 \\ ax + b, & x < -1 \end{cases}$ ，若 $f'(-1)$ 存在，求數對 $(a, b) =$ _____。

3. 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x = 0$ 處有極小值 1，且此函數圖形在點 $(-1, 3)$ 與直線 $y = -3x$ 相切，則 $f(x) =$ _____。

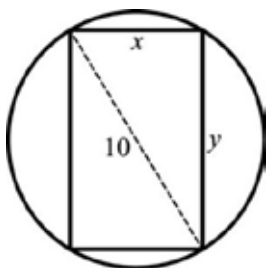
4. 設函數 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ ，當 $x = 0$ 的極大值為 4，並與 x 軸相切，則序組 $(p, q, r) =$ _____。

5. 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x = 3$ 處有極小值 -2 ，且點 $(1, 14)$ 是其圖形的反曲點，則 $f(x) =$ _____。

6. 對於任意實數 x ，不等式 $x^4 + 3x^2 + 10x - a \geq 0$ 恆成立，求實數 a 的範圍為 _____。

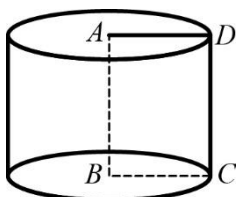
三、非選題（每題 8 分，1 題共 8 分）

1. 如圖，某設計師要將一個直徑為 10 吋的圓形木板鋸成長方形的砧板，設砧板寬為 x 吋，長為 y 吋，且砧板的耐用度 T 與 $(xy)^2$ 成正比，即 $T = k(xy)^2$ 其中 k 為一固定正數，則當砧板耐用度最大時，數對 $(x, y) =$ _____。



四、混合題（每題 10 分，1 題共 10 分）

1. 如圖，已知矩形 $ABCD$ 的周長為 24，以一邊 $\overline{AB}$ 為軸，將此矩形旋轉一周，得到一個直圓柱。



- (1) 設邊長 $\overline{AB} = x$ ，下列何者為 x 的範圍？（單選題）
(A) $0 < x < 24$ (B) $0 < x < 20$ (C) $0 < x < 18$ (D) $0 < x < 16$
(E) $0 < x < 12$
- (2) 若以函數 $V(x)$ 表為此直圓柱體積，則 $V(x) =$ _____。（填充題）
- (3) 求此直圓柱體積的最大值。（非選擇題）