

111 學年度第一學期第三次定期考高三數甲試題

命題範圍：第三章積分

一、多選題(每題 8 分，共 4 題，計 32 分)

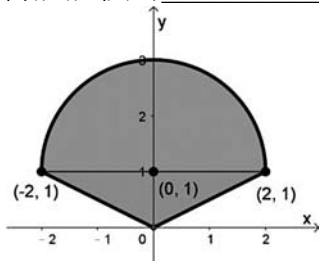
說明：每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

- 有關下列各選項的敘述，試選出正確的選項。
 - 設 $a < b$ ，且 $f(x)$ 為區間 $[a, b]$ 上的連續函數，若將區間 $[a, b]$ 平分成 n 等分，且上和為 U_n 、下和為 L_n ，則 $U_n > L_n$
 - 兩連續函數 $F(x)$ 與 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的反導函數，則 $F(x) = G(x) + c$ ，其中 c 為常數
 - 設 $f(x)$ 為區間 $[a, b]$ 上的連續函數，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反導函數，則 $\int_a^x f(t) dt = F(x)$
 - $\int_{-1}^1 |x^3 - x| dx = \left| \int_{-1}^1 (x^3 - x) dx \right|$
 - 設 a, b 為實數且 $a < b$ ，則定積分 $\int_a^b (x^4 - 9x^2) dx$ 在 $a = -3, b = 3$ 時有最小值。
- 設多項式函數 $f(x) = -x(x-1)(x-2)(x-3)$ 的圖形與 x 軸所圍成的封閉區域為 R 。試選出可以表示區域 R 面積的選項。
 - $\int_0^3 f(x) dx$ (2) $\int_0^3 |f(x)| dx$ (3) $\left| \int_0^3 f(x) dx \right|$
 - $\int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$
 - $\int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx + \int_2^3 |f(x)| dx$ 。
- 已知 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n+i)^2$ 、 $b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - i^2)$ 、 $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (3n+i-1)$ 。試選出正確的選項。
 - $a > b$ (2) $b > c$ (3) $b < c$ (4) $a > c$ (5) $a < c$ 。
- 設函數 $f(x) = \int_0^x (t^2 - 4t + 3) dt$ 。試選出正確的選項。
 - $f'(x) = x^2 - 4x + 3$
 - 當 $x = 1$ 時， $f(x)$ 有極大值
 - 當 $x = 3$ 時， $f(x)$ 有極小值
 - $\frac{d}{dx} \int_0^{2x} (t^2 - 4t + 3) dt = 8x^2 - 16x + 6$
 - $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} (t^2 - 4t + 3) dt = x^4 - 4x^2 + 3$ 。

二、填充題(每題 6 分，共 8 題，計 48 分)

說明：每題完全答對者，得 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^n i\right)\left(\sum_{i=1}^n i^4\right)}{\left(\sum_{i=1}^n i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n i^3\right)}$ 之值為_____。
- 設實係數多項式函數 $f(x) = px^2 + qx + r$ ，且滿足 $f(-2) = 3$ 、 $\int_a^b f(x) dx = 5$ 、 $\int_a^b xf(x) dx = -10$ 、 $\int_a^b x^2 f(x) dx = 20$ ，則 $\int_a^b (f(x))^2 dx$ 之值為_____。
- 已知函數 $f(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$ ，則定積分 $\int_0^2 f(x) dx$ 之值為_____。
- 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + \int_2^x f(t) dt$ ，則函數 $y = f(x)$ 的圖形以點 $(2, f(2))$ 為切點之切線方程式為_____。
- 設函數 $f(x) = \int_1^x 3t(t-2) dt$ ，若方程式 $f(x) = k$ 有三個相異實根，則 k 的範圍為_____。
- 設函數 $y = \sqrt{1-x}$ 的圖形與 x 軸、 y 軸所圍成的封閉區域為 R ，則區域 R 繞 y 軸旋轉所得的旋轉體體積為_____。
- 如圖，已知 R 是以點 $(0,1)$ 為圓心，半徑為 2 的上半圓弧與直線 $x = 2y$ 及 $x = -2y$ 所圍成的封閉區域，則區域 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為_____。

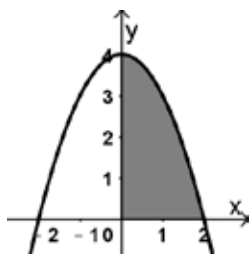


- 區間測速的原理是指：「車輛行經某路段上設定兩個偵測點，車輛通過時，就會記錄車輛在兩個偵測點間的行駛時間及距離，再推算出車輛行駛的平均速度，以判斷車輛是否超速。」。若小建在採行區間測速執法的某段筆直的道路上行駛，在這段道路上，已知 $t = 0$ (秒) 時車輛通過偵測起點， $t = 100$ (秒) 時車輛通過偵測終點，且開車的速度可用函數 $v(t) = -\frac{3}{2500}t^2 - \frac{2}{25}t + 24$ (公尺/秒) 表示，則小建在這段道路上的平均速度為_____ (公尺/秒)。

三、計算題(每題 10 分，共 2 題，計 20 分)

說明：請寫出計算過程，否則不予計分。

1. 如圖鋪色區域 R 為函數 $f(x) = -x^2 + 4$ 的圖形與 x 軸、 y 軸，在第一象限所圍成的封閉區域，若將區間 $[0, 2]$ 平分成 n 等分，且上和為 U_n 、下和為 L_n 。
 - (1) 試以 n 表示 U_n, L_n 。
 - (2) 求滿足 $U_n - L_n < 0.01$ 的最小正整數 n 。
 - (3) 利用夾擠定理求區域 R 的面積。



2. 設兩函數 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$ 與 $g(x) = x^2 - 2x + 1$ 的圖形所圍成的封閉區域為 R ，求區域 R 的面積。