

111 學年度第二學期第二次定期考高三數甲試題

命題範圍：第一章隨機變數與第二章複數平面

一、單選題（占 10 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 5 分。

1. 某次考試中，有一試題採單選題，此題有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 等五個選項，其中只有一個選項是正確的，若答對此題，可得 10 分，而答錯則倒扣 x 分，假設某考生決定“靠運氣”瞎猜其中一個選項。為了讓該考生在此題上得分的期望值為 0，則 x 值等於下列哪一個選項？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{5}{2}$ (E) $\frac{5}{8}$

2. 試問 $\frac{(-\cos 13^\circ + i \cos 77^\circ)(\cos 137^\circ + i \sin 763^\circ)}{(\cos 317^\circ + i \sin 223^\circ)(\sin 103^\circ + i \sin 193^\circ)}$ 之值為下列哪一個選項？

(A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) i (E) $-i$

二、填充題（占 24 分）

說明：第 3 題至第 5 題。每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項填在答案卷之「多選題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯 3 個以上選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

3. 投一公正骰子二次， X 表 3 點出現次數，即 $X \sim B(2, \frac{1}{6})$ ，試選出正確的選項。

(A) $P(X=0) = \frac{1}{36}$ (B) $P(X=1) = \frac{5}{18}$ (C) $P(X=2) = \frac{25}{36}$
(D) $E(X) = \frac{1}{3}$ (E) $Var(X) = \frac{5}{18}$

4. 設 a, b, c 皆為正整數，考慮多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$ ，試選出正確的選項。

(A) $f(x) = 0$ 無正根 (B) $f(x) = 0$ 一定有實根
(C) $f(x) = 0$ 一定有虛根 (D) $f(1) + f(-1)$ 的值是偶數
(E) 若 $a + c > b + 3$ ，則 $f(x) = 0$ 有一根介於 -1 與 0 之間

5. 設 n 為自然數， $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i \right)^n$ ，試選出正確的選項。

(A) $|z_1| < 1$

(B) $\text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{12}$

(C) 使 z_n 為純虛數之最小正整數 n 為 6

(D) 使 z_n 為實數之正整數 n 必為 12 的倍數

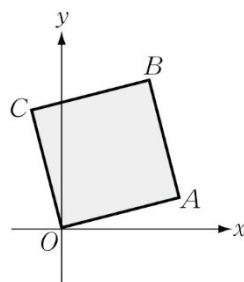
(E) $\text{Arg}(z_3) = \frac{3\pi}{10}$

第貳部份：填充題 (佔 56 分)

說明：第 1 至 8 題，將答案填在答案卷之「填充題答案區」。每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣。

1. 某次考試，有一多重選擇題，有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五個選項。給分標準為完全答對給 8 分，只答錯 1 個選項給 5 分，答錯 2 個選項得 2 分，其他狀況得 0 分。若某一考生對該題的 A 、 B 選項已確定是應選的正確答案，但 C 、 D 、 E 三個選項根本看不懂，決定這三個選項要用猜的來作答。請問他對此題所得分數的期望值是_____分。(請化成「最簡分數」)

2. 如右圖正方形 $OABC$ ， O 為原點， $A(5,1)$ ，求 B 點坐標為_____。



3. 為進行數學遊戲，建中優質數學營買入一種正八面體形狀的新款骰子，八個面各刻上 1、2、3、4、5、6、7、8 等數字。若投擲出 7 點稱為「成功」，沒有出現 7 點則繼續投擲，直到出現 7 點為止。 X 代表成功所需投擲的次數， $P(X=n)$ 代表投擲到第 n 次才成功的機率。若投擲次數的期望值為 a ，標準差為 $2\sqrt{b}$ (b 為正整數)，則數對 $(a,b)=$ _____。(兩項全對才給分)

4. 計算 $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{18} =$ _____。

5. 連續投擲一粒公正骰子 n 次，若希望至少出現一次 1 點的機率不低於 0.99，則 n 至少為_____次。($\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)
6. 設方程式 $x^7 = 1$ 的 7 個根為 $1, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ ，則 $(2 - \omega_1)(2 - \omega_2)(2 - \omega_3)(2 - \omega_4)(2 - \omega_5)(2 - \omega_6)$ 的值為_____。
7. 袋中有 2 個黑球、4 個白球，每次取一球，每球被取出的機會均等，且取後不放回，直到取出的是白球才停止。設隨機變數 X 表示取出白球所需的次數，則 $Var(X)$ 的值為_____。(答案化成「最簡分數」)
8. 令 $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{4}$ ，且 $\sum_{k=n}^{\infty} |z^{k+1} - z^k| < 10^{-10}$ ，則最小自然數 n 為_____。

第參部份：計算題 (占 10 分)

小明「穿越」到未來廿三世紀，發現當時的地球，位於赤道的兩國 A 、 B 在爭取世界領導權。此時 A 國先發射一枚據稱是「探測氣象」的「奈米攝影機」，到距地心 $20000\sqrt{2}$ 公里的 A 國發射基地上空，沿著赤道上方快速飛行。設赤道坐於複數平面，地心為原點 O ，地心向 A 國發射基地的射線為「實軸」，在地面的觀測者視為「不動點」。第 n 次觀察，攝影機位於複數平面上

$z_n = 20000\sqrt{2} \left(\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\sqrt{2}} \right)^n$ 的位置，其中銳角 θ 是每個「固定時距」觀察攝影機與地心連線所走過的圓心角。右圖僅是「示意圖」，非真實尺寸。已知

$$\cos 2\theta = \frac{\sqrt{5} + 1}{4},$$

- (1) 求 $\sin \theta$ 之值。(有理化為最簡根式，否則不給分)(5 分)
- (2) 第 7 次觀察時，即圓心角為 7θ ，攝影機正好在 B 國上方，求此時的複數「虛部」之值。(有理化為最簡根式，否則不給分)(5 分)

