

111 學年度第一學期第一次定期考高三數甲試題

命題範圍：第一章數列與函數的極限

一、多選題(每題 8 分，占 16 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題均計分。每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項填在答案卷之「多選題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 6 分；答錯 2 個選項者，得 4 分；答錯 3 個選項，得 2 分；答錯 4 個以上選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 設 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ ， $\langle c_n \rangle$ 為三個實數數列，試問下列哪些選項是正確的？

(1) 若 $\langle a_n \rangle$ 發散，則 $\langle a_n^2 \rangle$ 也發散

(2) 若對於任何正整數 n 皆有 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ，而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$

(3) 若級數 $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收斂，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(4) 若 $S = a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 為收斂的無窮等比級數，則 $T = a_2 + a_4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 也收斂

(5) 若 $a_n < 1$ 且 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在，則 $L < 1$

2. 已知 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為定義在實數上的實係數多項式函數，則下列哪些選項正確？

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3 - 1}$ 存在，則 $x^3 - 1$ 為 $f(x)$ 的因式

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$

(3) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 皆在 $x = 0$ 連續且定義 $h(x) = f(x) + g(x)$ ，則 $h(x)$ 在 $x = 0$ 連續

(4) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 皆在 $x = 0$ 連續且定義 $h(x) = (f \circ g)(x)$ ，則 $h(x)$ 在 $x = 0$ 連續

(5) 設 $f(x) = x^3$ ， $g(x) = x^2 + 2$ ，則 $(f \cdot g)(x)$ 為 6 次多項式函數

二、填充題（每題 6 分，占 72 分）

說明：第 1 至 12 題，將答案填在答案卷之「填充題答案區」。每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣。

1. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n + 2}{a_n - 3} = 6$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____。
2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+7} - \sqrt{n+4}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}} =$ _____。
3. 設 $(x+1)(x+2)\dots(x+n) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ ，其中 n 是正整數，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-2}}{3n^2 \cdot a_{n-1}} =$ _____。
4. 求 $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+(1+2)} + \frac{1}{1+(1+2)+(1+2+3)} + \dots$
 $+ \frac{1}{1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+\dots+n)} + \dots =$ _____。
5. 一皮球自離地面 20 公尺處落下，每次反彈高度為落下高度的 $\frac{3}{5}$ ，則此皮球到靜止時所經過的路程為_____公尺。
6. 無窮級數 $\frac{2}{2} + \frac{7}{2^2} + \frac{12}{2^3} + \dots + \frac{5n-3}{2^n} + \dots =$ _____。
7. x 是實數，函數 $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 8}{x^2 + 3x + 3}$ 的值域為_____。(以集合表示)
8. 設 a 為實數， $f(x) = x + 1$ ， $g(x) = ax - 1$ ，若 $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ ，則 a 的值為_____。
9. 求 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^{100} - 1}{x+2} =$ _____。

10. 設 $a, b \in \mathbb{R}$ ，若 $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \leq 2 \\ \frac{x^2+ax+b}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 存在，則數對 (a, b) = _____。

11. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} =$ _____。

12. 設 $f(x)$ 為三次多項式，若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 + 3x - 4} = -1$ 且 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} = 2$ ，
則 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$ _____。

三、計算題（每題 12 分，占 12 分）

說明：本部分共有 1 大題，答案必須寫在答案卷之「計算題答案區」。同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。

1. 等差數列 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ 其公差分別為 d_1, d_2 ，且 $d_1 d_2 \neq 0$ 。已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 3$ ，

試回答下列問題：

(1) 求 $\frac{d_1}{d_2}$ 之值。(6 分) (2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n b_{2n}}$ 之值。(6 分)