

111 學年度第二學期第一次定期考高一數學試題

命題範圍：第一章 數列與級數、第二章 數據分析

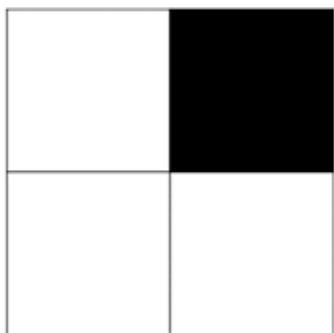
一、 填充題(每題 6 分，共 48 分)

1. 已知一等比數列，首項為 9，公比為 $-\frac{1}{2}$ ，則其前 6 項和為_____。(化為最簡分數)

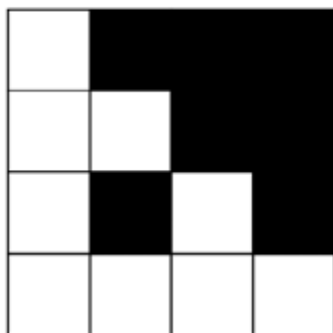
2. 以下為某班 36 位學生成績，則此 36 筆數據的第 25 百分位數為_____。

學生編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
成績	26	96	10	24	58	2	5	90	7	23	13	99	48	56	81	20	87	51
學生編號	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
成績	61	6	62	12	67	93	64	70	78	97	86	46	2	5	81	57	40	12

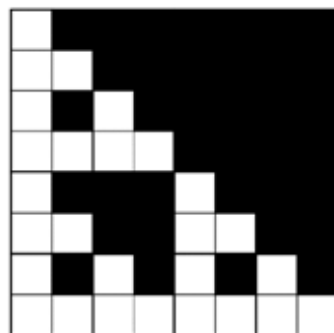
3. 某公司連續五年營收成長率為 -40% ， 20% ， 20% ， 60% ， 80% ，若該公司這五年營收的平均成長率為 $r\%$ ，則 $r =$ _____。
4. 已知某班五位同學的身高為 172 公分，174 公分，175 公分，178 公分，181 公分，則此五位同學身高標準差為_____公分。(化簡至最簡根式)
5. 若有一規則數列如下：1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ...，依 1 個 1，2 個 2，3 個 3，4 個 4 的規則，以此類推，則前 100 項之和為_____。
6. 平面上有一邊長為 1 的正方形。將此正方形四等分後，在右上角的空白處塗黑，得到的圖形如下圖(一)。再將圖(一)中空白的三個正方形各自四等分後，在右上角的空白處塗黑，得到的圖形如下圖(二)。按此規律，設 a_n 是圖 n 中黑色區域的面積，則_____。(化為最簡分數)



圖(一)



圖(二)



圖(三)

7. 小建 2023 年 1 月初向銀行借貸 600 萬買房，年利率 3%，按月複利計息，次月月初開始，每個月都償還相同金額，20 年(即 240 個月)還清。當貸款清償完畢，小建還款總金額與借貸本金的比值為_____。
(四捨五入到小數點後第 1 位)($1.0025^{240} \approx 1.82$)
8. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 = 78$ 且對任意正整數 n 滿足 $a_{n+1} = a_n + (24 - 2n)$ 。若 S_n 為 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和，則當 $n =$ _____時， S_n 有最大值。

二、多選題(每題 8 分，共 32 分)

說明：完全答對得 8 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個以上選項或未答得 0 分。

- 以下各項敘述，請選出正確的選項。
 - 若某次定期考甲科目班平均為 55 分，乙科目班平均為 60 分，而小建甲科目 59 分，乙科目 77 分，可知其乙科目在班上的表現優於甲科目。
 - 若數據 X 的標準差大於數據 Y 的標準差，則數據 X 的全距大於數據 Y 的全距。
 - 若一組數據 $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ 的標準差為 0，則 $x_1 = x_2 = \dots = x_{100}$ 。
 - 若某班 36 名學生每週玩線上遊戲時數的平均值為 15 小時，且第 3 四分位數為 19 小時，則至少有 9 名學生每週玩線上遊戲的時數超過 19 小時。
 - 若一組數據的中位數比平均數小，則此數據至少有 50% 的資料低於平均數。
- 設兩變量 X 與 Y 的二維數據資料為 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, 20$ ， μ_x 為 X 的算術平均數， μ_y 為 Y 的算術平均數； X' 為 X 的標準化數據， Y' 為 Y 的標準化數據，且 X 與 Y 的標準差皆大於 0，請選出正確的選項。
 - 若 (x'_i, y'_i) 大部分集中在二、四象限，則 X' 與 Y' 呈現負相關。
 - 若 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, 20$ ，都在一條直線上，則 X 與 Y 為完全正相關或完全負相關。
 - 若 Y 對 X 的迴歸直線斜率小於 0，則 Y' 對 X' 的迴歸直線斜率也小於 0。
 - 若 Y 對 X 的迴歸直線斜率大於 1，則 Y 的標準差比 X 的標準差大。
 - 已知 Y 對 X 的迴歸直線為 $y - 10 = 5(x - 6)$ 且 $x_1 = 3$ ，則 $y_1 = -5$ 。
- 已知 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列， $\langle b_n \rangle$ 為等比數列，且此兩個數列每一項都是實數，請選出正確的選項。

- (1) 若對任意正整數 n ， $c_n = a_n + a_{n+1}$ ，則 $\langle c_n \rangle$ 是等差數列。
 - (2) 若對任意正整數 n ， $d_n = a_{5n} - a_{4n+3}$ ，則 $\langle d_n \rangle$ 是等差數列且公差與 $\langle a_n \rangle$ 的公差相等。
 - (3) 若對任意正整數 n ， $e_n = a_{5n} + a_{4n+3}$ ，則 $\langle e_n \rangle$ 是等差數列且公差比 $\langle a_n \rangle$ 的公差大。
 - (4) 若對任意正整數 n ， $f_n = b_{5n} \cdot b_{4n+3}$ ，則 $\langle f_n \rangle$ 是等比數列。
 - (5) 若對任意正整數 n ， $g_n = b_n + b_{n+1}$ ，則 $\langle g_n \rangle$ 是等比數列。
4. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列， $\langle b_n \rangle$ 為等比數列，兩數列每一項都是實數。設 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和為 S_n ， $\langle b_n \rangle$ 的前 n 項和為 T_n ，請選出正確的選項。
- (1) 若 $\langle a_n \rangle$ 的公差小於 0，則 $S_n > S_{n+1}$ ，對任意正整數 n 恆成立。
 - (2) 若數列 $\langle S_n \rangle$ 有某一項小於 0，則 $\langle a_n \rangle$ 的公差小於 0。
 - (3) 若 $T_{100} > T_{99}$ ，則 $\langle b_n \rangle$ 的公比大於 0。
 - (4) 若數列 $\langle T_n \rangle$ 每一項都大於 0，則 $\langle b_n \rangle$ 的公比大於 0。
 - (5) 若 $T_2 \cdot T_3 < 0$ ，則 $\langle b_n \rangle$ 的公比小於 -1。

三、計算證明題：(2 題，共 20 分)

1. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 = 1$ ，且對任意正整數 n 滿足 $a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$ 。

(1) 試求 a_2 、 a_3 、 a_4 之值。(3 分)

(2) 請猜測此數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般項，並用數學歸納法證明之。(7 分)

2. 建國冰果室欲推出新產品，在上市前以不同的單價 x (單位：元) 調查市場的需求量 y (單位：百碗)。調查結果如下表：

單價 x (元)	55	65	75	85	95
需求量 y (百碗)	14	15	13	11	12

1. 試求 x 與 y 的相關係數。(5 分)
2. 試求 y 對 x 的迴歸直線方程式。(3 分)
3. 若此產品上市後單價訂為 60 元，請利用迴歸直線方程式預測市場的需求量。(2 分)