台北市立第一女子高級中學 111 學年度 第一學期

高三期末考

一、單一選擇題（每題 5 分，共 15 分。）

1. 已知17^{10000}是一個 12305 位數，則17^{100}是幾位數？
(1) 111 位數 (2) 123 位數 (3) 124 位數 (4) 6152 位數 (5) 6153 位數

2. 已知平面上直線$L:5x-2y=3$，則下列哪一條直線與 L 的距離最遠？
(1) 將 L 向右平移 5 個單位而得到的直線L_1。
(2) 將 L 向右平移 4 個單位，再向下平移 1 個單位而得到的直線L_2。
(3) 將 L 向右平移 3 個單位，再向下平移 2 個單位而得到的直線L_3。
(4) 將 L 向右平移 2 個單位，再向下平移 3 個單位而得到的直線L_4。
(5) 將 L 向右平移 1 個單位，再向下平移 4 個單位而得到的直線L_5。

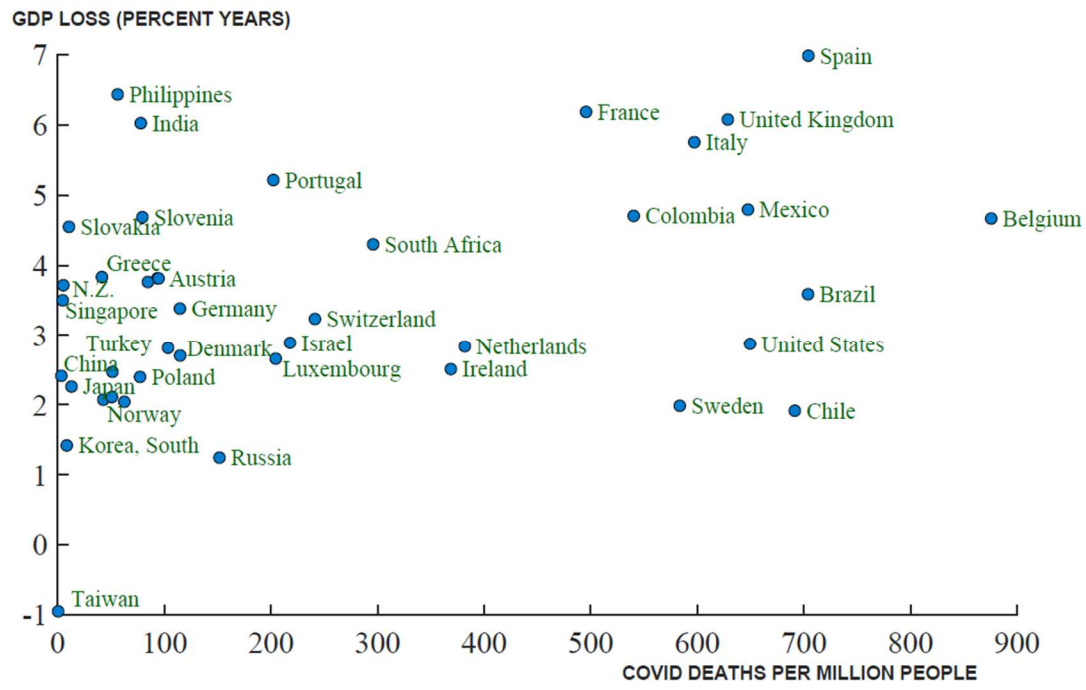
3. 小綠有兩顆相同的正立方體骰子，每個骰子的六個面分別標示號碼$1,2,4,8,16,32$，則小綠投擲這兩顆骰子，計算面朝上的號碼總和 S，則 S 有幾種可能的值？
(1) 21 種 (2) 27 種 (3) 28 種 (4) 63 種 (5) 64 種

二、多重選擇題（共 50 分。）
（每題至少有一個選項是對的，每個選項 2 分，答錯不倒扣，全題未作答則不計分）

4. 已知非零實數 x、y 滿足 $x+y=20$，則下列哪些選項為真？
(1) xy 的最大值為 100。
(2) xy 沒有最小值。
(3) x^2+y^2 的最小值為 200。
(4) x^2+y^2 的最大值為 400。
(5) $\sqrt{(x-20)^2+(y-22)^2}$ 的最小值為$2\sqrt{61}$。

5. 已知函數 $y=f(x)=x^3-6x^2-15x+2$ 的圖形對稱中心為 $A(\alpha,\beta)$，下列哪些選項為真？
(1) $\alpha=2$。
(2) $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 處的一次近似為 $-27x-44$。
(3) 若 $t>\alpha$，且 $f(x)$ 在 $x=t$ 處的附近一次近似於 $mx+k$，則 $m>-27$。
(4) 若 $t<\alpha$，且 $f(x)$ 在 $x=t$ 處的附近一次近似於 $mx+k$，$m<-27$。
(5) 水平線 $y=\beta$ 與 $y=f(x)$ 的圖形只交於一點。

6. 2020 年 10 月份，史丹佛經濟學教授瓊斯（Charles I. Jones）與賓州大學經濟學教授維拉維德（Jesús Fernández-Villaverde）共同發表一份 Covid-19 疫情對各國總體經濟影響的研究報告。報告中下圖的橫軸為因染疫的每百萬人死亡人數，縱軸為 GDP 累計損失的百分比。請根據此圖表判斷下列哪些選項為真。



資料來源：《Macroeconomic Outcomes and Covid-19: A Progress Report》報告

(1) Taiwan 是圖中唯一 GDP 沒有累計損失的國家。

(2) 圖中顯示 United States 因染疫的死亡率是 Taiwan 的 10 倍以上。

(3) 圖中所有國家的平均死亡率，就是各別國家死亡率的算術平均數。

(4) 如果小綠想重新製圖，將縱軸的數據改成「GDP 累計成長的百分比」，則此二維數據的相關係數不變。

(5) 如果小綠想重新製圖，將橫軸的數據改成「因染疫的每千萬人死亡人數」，則此二維數據的回歸直線斜率會變成原來的 10 倍。

7. 已知 $\overrightarrow{a}=(1,1)$、$\overrightarrow{b}=(-1,2)$，令 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$，其中 t 為實數。

下列哪些選項為真？

(1) $t=\frac{1}{2}$ 時，$\overrightarrow{v}$ 平分 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 的夾角。

(2) $\left|\overrightarrow{v}\right|$ 有最小值時，$t=-\frac{2}{5}$。

(3) $\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 可能垂直。

(4) 當 $t>0$ 時，$\overrightarrow{v}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影長度與 t 成正比。

(5) 當 $t>0$ 時，$\overrightarrow{v}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影長度與 t 成正比。

8. 已知兩數列$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$滿足$\begin{cases}a_1=8\\b_1=2\end{cases}$，且對於正整數$1\le n\le 99$，$\begin{cases}a_{n+1}=4a_n+b_n\\b_{n+1}=a_n+4b_n\end{cases}$。

定義兩數列$\langle c_n\rangle=\langle a_n+b_n\rangle$、$\langle d_n\rangle=\langle a_n-b_n\rangle$。下列哪些選項為真？

(1) 對於正整數$1\le n\le 99$，$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$。　(2) $\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}34\\16\end{bmatrix}$。

(3) 對於正整數$1\le n\le 99$，$\begin{bmatrix}c_{n+1}\\d_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_n\\d_n\end{bmatrix}$。　(4) $\begin{bmatrix}c_n\\d_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5^n\\3^n\end{bmatrix}$。

(5) $\dfrac{d_1}{c_1}+\dfrac{d_2}{c_2}+\cdots\cdots+\dfrac{d_{100}}{c_{100}}$的值為有限小數。

三、填充題（每題 5 分，共 20 分。答案均需化為最簡形式。）

9. 已知T、F、G均為二階方陣，且滿足$TFG=I$，其中I為單位方陣。

若$T=\begin{bmatrix}2&0\\2&2\end{bmatrix}$且$G=\begin{bmatrix}2&0\\2&3\end{bmatrix}$，則$F=$ $\begin{bmatrix}\frac{\bigcirc}{\bigcirc}&\bigcirc\\\frac{\bigcirc\bigcirc}{\bigcirc\bigcirc}&\frac{\bigcirc}{\bigcirc}\end{bmatrix}$ 。

10. 空間中有一直線$L:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+5}{4}$與一平面$E:x-y-z=2$。

若另有一直線M落在平面E上，且與直線L垂直相交於一點，

則直線M的比例式為 $\dfrac{x-2}{\bigcirc}=\dfrac{y+\bigcirc\bigcirc}{\bigcirc}=\dfrac{z-\bigcirc\bigcirc}{\bigcirc\bigcirc}$ 。

11. 已知坐標平面上有正六邊形$OABCDE$，其六個頂點依逆時針順序依序為$O(0,0),A(20,23),B,C,D,E$，

則C點坐標為 $(\bigcirc\bigcirc-\bigcirc\bigcirc\sqrt{\bigcirc},\bigcirc\bigcirc+\bigcirc\bigcirc\sqrt{\bigcirc})$ 。

12. 已知平面上有$\triangle ABC$，其中三邊長分別為$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=7$、$\overline{CA}=8$。

以$\overline{BC}$為一邊向$\triangle ABC$的外部作正三角形BCD，連接$\overline{AD}$，

則$\overline{AD}$的長度為 $\sqrt{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}$ 。

四、混合題（每小題 5 分，共 15 分。）
（非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。）

消費者購物時，會獲得一張八位數字號碼（可從 00000000～99999999）的紙本統一發票，下表是某一期發票的對獎號碼與獲得獎金規則，每一張發票可兌換的獎項只能選擇獎金較高的獎項，不可重複兌領。

在 2022 年 12 月 12 日的綠園校慶園遊會，小綠參加某攤位舉辦的抽獎活動，他隨機抽取八位數字號碼（也可從 00000000～99999999），對獎的號碼與獎金比照下表的統一發票號碼與獎金：

年月份	2022 年 09～10 月
特別獎	**11174120** 同期統一發票收執聯 8 位數號碼與特別獎號碼相同者獎金 1,000 萬元
特獎	**59276913** 同期統一發票收執聯 8 位數號碼與特獎號碼相同者獎金 200 萬元
頭獎	**18079936** **20591738** **64500205** 同期統一發票收執聯 8 位數號碼與頭獎號碼相同者獎金 20 萬元
二獎	同期統一發票收執聯末 7 位數號碼與頭獎中獎號碼末 7 位相同者各得獎金 4 萬元
三獎	同期統一發票收執聯末 6 位數號碼與頭獎中獎號碼末 6 位相同者各得獎金 1 萬元
四獎	同期統一發票收執聯末 5 位數號碼與頭獎中獎號碼末 5 位相同者各得獎金 4 千元
五獎	同期統一發票收執聯末 4 位數號碼與頭獎中獎號碼末 4 位相同者各得獎金 1 千元
六獎	同期統一發票收執聯末 3 位數號碼與頭獎中獎號碼末 3 位相同者各得獎金 2 百元

（開獎日期：2022 年 11 月 25 日）

13. （單選題）小綠獲得「三獎」的機率為
(1) $\frac{3}{10^8}$ (2) $\frac{30-3}{10^8}$ (3) $\frac{300}{10^8}$ (4) $\frac{300-3}{10^8}$ (5) $\frac{300-30}{10^8}$

14. （非選擇題）若已知小綠中獎，則他中了六獎的機率為何？

15. （非選擇題）小綠獲得獎金的期望值為何？

台北市立第一女子高級中學 111 學年度 第一學期

高三期末考　　答案卷

三年＿＿＿＿班＿＿＿＿號

姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

一、單一選擇題（每題 5 分，共 15 分。）

1.	2.	3.
(3)	(1)	(1)

二、多重選擇題（共 50 分。）

4.	5.	6.	7.	8.
(1)(2)(3)	(1)(3)	(1)(2)	(3)	(1)(2)(3)(5)

三、填充題（每題 5 分，共 20 分。答案均需化為最簡形式。）

9.	10.
$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{-5}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$	$\frac{x-2}{3}=\frac{y+11}{5}=\frac{z-11}{-2}$

11.	12.
$(20-23\sqrt{3},23+20\sqrt{3})$	$\sqrt{129}$

四、混合題（每小題 5 分，共 15 分。）

13. 答案：(5)

14. $P(\text{中獎})=P(\text{特別獎})+P(\text{特獎})+P(\text{中頭獎號碼末三碼})$

$$=\frac{1}{10^8}+\frac{1}{10^8}+3\times\frac{10^5}{10^8}=\frac{300002}{10^8}$$

$P(\text{六獎})=P(\text{中末三碼})-P(\text{中末四碼})=\dfrac{3\times10^5-3\times10^4}{10^8}=\dfrac{270000}{10^8}$

所以 $P(\text{六獎}\mid\text{中獎})=\dfrac{P(\text{六獎且中獎})}{P(\text{中獎})}=\dfrac{P(\text{六獎})}{P(\text{中獎})}=\dfrac{270000}{300002}=\dfrac{135000}{150001}$　　答：$\dfrac{135000}{150001}$。

15.

	特別獎	特獎	頭獎	二獎	三獎	四獎	五獎	六獎
機率	$\frac{1}{10^8}$	$\frac{1}{10^8}$	$\frac{3}{10^8}$	$\frac{27}{10^8}$	$\frac{270}{10^8}$	$\frac{2700}{10^8}$	$\frac{27000}{10^8}$	$\frac{270000}{10^8}$
獎金	10000000	2000000	200000	40000	10000	4000	1000	200

所以獎金期望值 $=(1\times10000000+1\times2000000+3\times200000+27\times40000)/10^8$

$+(270\times10000+2700\times4000+27000\times1000+270000\times200)/10^8$

$=(1000+200+60+108+270+1080+2700+5400)/10^4=1.0818$

答：1.0818 元。