

111 學年度第一學期第二次定期考高一數學試題

命題範圍：第二章 圓與直線

第壹部分、選擇題(單選題、多選題共占 54 分)

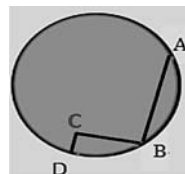
一、單選題(每題 6 分，共 30 分)

說明：第 1 題至第 5 題為單選題。

- 設在坐標平面上的三條直線 L_1, L_2, L_3 斜率分別為 m_1, m_2, m_3 ，若 L_1 通過兩點 $(-4, 1)$ 、 $(2, 3)$ ， L_2 平行直線 $2x + 3y + 1 = 0$ ，且 L_3 垂直恰好直線 $2x + 3y + 1 = 0$ ，則下列選項何者正確？
(1) $m_1 > m_2 > m_3$ (2) $m_1 > m_3 > m_2$ (3) $m_2 > m_3 > m_1$
(4) $m_3 > m_1 > m_2$ (5) $m_3 > m_2 > m_1$
- 在坐標平面上，已知圓 O 以 $(1, 5)$ 為圓心且恰與直線 $\overline{LM}$ 相切，若點 L 坐標為 $(2, 3)$ 且點 M 坐標為 $(8, 11)$ ，試求圓 O 方程式為下列哪一個選項？
(1) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 1$ (2) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 2$ (3) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$
(4) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 6$ (5) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 8$
- 在坐標平面上，直線 $y = 3x$ 與直線 $y = -2x - 1$ 將坐標平面分割成四個區域，試問下面哪一個選項中的點會和點 $(1, -1)$ 在同一個區域？
(1) $(-20, 56)$ (2) $(-10, -26)$ (3) $(13, -30)$ (4) $(2, 7)$ (5) $(3, 8)$
- 在坐標平面上，有一點 $A(1, 3)$ 與一條斜率為負的直線 $L: y = ax + b$ ，若點 A 關於直線 L 的對稱點恰為 B (直線 L 亦可視為 L 的垂直平分線)，則 $a + b$ 之值為下列哪一個選項？
(1) -1 (2) 1 (3) 4 (4) 7 (5) 11
- 公園中一座圓形人工湖，在此湖邊上 A, B, D 三點上分別架設 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ 橋樑提供民眾休憩行走，若此三座橋樑的長度分別為 30 公尺，18 公尺，6 公尺，而且 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 及 $\overline{BC}, \overline{CD}$ 兩兩相互連接並垂直，如右示意圖所示：

試求此座人工湖的面積最接近下列哪個選項？

- (1) 360π 平方公尺
- (2) 400π 平方公尺
- (3) 450π 平方公尺
- (4) 480π 平方公尺
- (5) 600π 平方公尺



二、多選題(每題 8 分，共 24 分)

說明：第 6 題至第 8 題，每題至少有一個選項是正確的。每題全部答對得 8 分，答錯不倒扣，未答者不給分。只錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個或三個以上選項不給分。

6. 在坐標平面上，若一直線 L 過點 $(-6, \frac{3}{2})$ 且斜率為 $\frac{3}{4}$ ，而直線 L 與 x 軸及 y 軸所圍封閉區域為 $\triangle ABC$ ，試選出正確的選項。
- (1) 直線 L 的 x 軸截距 8 (2) 直線 L 的 y 軸截距 6
(3) $\triangle ABC$ 面積為 24 (4) $\triangle ABC$ 的內切圓圓心為 (4,4)
(5) $\triangle ABC$ 的內切圓面積為 8π
7. 在坐標平面上由三直線 $x - 2y = 0$, $x + y - 3 = 0$, $2x - y = 0$ 所圍成 $\triangle ABC$ ，試選出正確的選項。
- (1) $\triangle ABC$ 的外心為 $(\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$ (2) $\triangle ABC$ 的垂心為 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
(3) $\triangle ABC$ 的重心為 (1,1) (4) $\triangle ABC$ 的外心、重心、垂心三點均都在同一條直線(此直線又稱尤拉線)上，且該直線斜率為 1
(5) $\triangle ABC$ 的面積為 3
8. 有一射擊遊戲，將發射台設置於坐標平面的原點，並放置三個半徑為 1 的圓盤靶子，其中圓心分別為 (3,3)、(5,4) 與 (10,1)。玩家選定一正數 a ，並按下按鈕後，發射台將向點 $(1, a)$ 方向發射一到雷射光束（形成一射線）。假設雷射光束擊中靶子後可以穿透並繼續沿原方向前進（削過圓盤邊緣也視為擊中）。試選出正確的選項。
- (1) 雷射光束落在通過原點且斜率為 a 的直線上
(2) 若雷射光束擊中圓心為 (5,4) 的圓盤靶子之圓心，則 $a = \frac{4}{5}$
(3) 若 $a=2$ ，則雷射光束會擊中圓心為 (3,3) 的圓盤靶子
(4) 若玩家發射一道雷射光束後，且擊中圓心 (10,1) 為的圓盤靶子，則 $0 < a \leq \frac{20}{99}$
(5) 玩家最少需要發射二道雷射光束才可擊中三個圓盤靶子

第貳部份：填充題 (占 35 分)

說明：第 9 題至第 13 題，共 5 題，每題答對得 7 分。

9. 在坐標平面上，所有滿足不等式 $9 \leq (x+1)^2 + (y+2)^2 \leq k$ 的點 $P(x, y)$ 所形區域 R 之面積為 16π ，試求 k 值為_____。

10. 在坐標平面上，圓 $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ 上的點離點 $A(1, -7)$ 的最近距離為 _____。

11. 坐標平面上，滿足不等式 $\begin{cases} 3x - y \geq -1 \\ x + 2y \leq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ 的格子點 (x, y 坐標均為整數) 的個數有 _____ 個。

12. 在坐標平面上， O 為原點且 $OABC$ 為正方形，已知 $P(2, 0)$ 在 $\overline{AB}$ 邊上，點 $Q(\sqrt{3}, 1)$ 在 $\overline{BC}$ 邊上，試求正方形 $OABC$ 面積為 _____。

13. 在坐標平面上，從 y 軸上的 P 點，作圓 $C: (x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$ 的兩條切線恰好相互垂直，求 P 點坐標為 _____。

第叁部份：計算題(占 11 分)

作答時非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則 將酌予扣分。

莫爾圓是工程學經常使用的數學工具，它是坐標平面上，圓心位於 x 軸的圓。為了得出莫爾圓方程式，工程師經常巧妙的計算出坐標平面上的兩個特別點 P 與 Q ，而莫爾圓就是以線段 $\overline{PQ}$ 為直徑的圓。根據莫爾圓的定義試回答下列問題。

(1) 試求在坐標平面上，以 $P(1, \sqrt{3}), Q(3, -\sqrt{3})$ ，兩點作為直徑兩端點所構造出的莫爾圓方程式為何？ (3 分)

(2) 若坐標平面上，正方形 $ABCD$ 恰與上述(1)莫爾圓交於 $A、B$ 兩點，且 $C、D$ 兩點在直線 $x - 2y = 10$ 上，則通過 $A、B$ 兩點的直線方程式為何？ (8 分)