

111 學年度第二學期第三次定期考高二數 B 試題

命題範圍：以 4-1 矩陣的定義與運算、4-2 乘法反方陣與矩陣的應用

試卷內容可能包含一些數 A 或其他補充，未必完全是數 B 的範圍，請斟酌參考。

一、是非題（每題 2 分，共 10 題，共 20 分）

1. () 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ，則 A 是 2×3 階矩陣。
2. () 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，則 $2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$ 。
3. () 若 A 為二階方陣， $O_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，則 $A + O_{2 \times 2} = O_{2 \times 2} + A = A$ 。
4. () 若 A 為二階方陣， $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $AI_2 = I_2A = A$ 。
5. () 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ，則 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ 。
6. () 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ，則 A 沒有乘法反方陣。
7. () 若 A, B, C 皆為二階方陣，滿足 $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，則 $AC = (-1)BC$ 。
8. () 若 A, B, C 皆為二階方陣，其中 A 有乘法反方陣且滿足 $AB = CA$ ，則 $B = C$ 。
9. () 若 A, B 皆為二階方陣，滿足 $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，則 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 或

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

10. () 若 A, B 皆為二階方陣，則 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 。

二、計算題（每(小)題 5 分，共 80 分）

11. 設矩陣 $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ ，已知 $a_{ij} = 4i + 5j$ ，試將矩陣 A 表達出來，其中每個元都必須是數字。

12. 設 a, b, c, d, e, f 為實數，已知 $\begin{bmatrix} -1 & -4 & a+b \\ e+f & c-d & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+2d & a-b & 8 \\ 4 & 5 & 2e+3f \end{bmatrix}$ ，試求 $a+b+c+d+e+f$ 的值。

13. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ ，已知 $2X + 3A = 4B + 5C$ ，試求二階方陣 X 。

14. 設二階方陣 X, Y 滿足 $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ， $3X + 4Y = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ ，試求二階方陣 $5X + 8Y$ 。

15. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ，試求(1) AB ，(2) BA 。

16. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求 $(A + I_2)^3$ 。

17. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，試求(1) A^{10} ，(2) B^{10} ，(3) C^{10} 。

$$\times 1^{10} = 1, 2^{10} = 1024, 3^{10} = 59049, 4^{10} = 1048576$$

18. 設 a 為實數，試就 a 值討論 $\begin{bmatrix} a & 3 \\ 2 & a+1 \end{bmatrix}$ 是否有乘法反方陣？

19. 設 A 為二階方陣，滿足 $A \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ ，試求二階方陣 A 。

20. 試求下列各方程組的解：(1) $\begin{cases} 3x+5y=4 \\ x+2y=6 \end{cases}$ ，(2) $\begin{cases} x+2y+5z=1 \\ 3x+7y+6z=3 \\ x+4y-12z=2 \end{cases}$ 。

$$\ast \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -108 & 44 & -23 \\ 42 & -17 & 9 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -108 & 44 & -23 \\ 42 & -17 & 9 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

21. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ y & 3 \end{bmatrix}$ ，其中 x, y 為實數，已知 $A^{-1} = 3A$ ，試求實數 x, y 的值。

22. 設 A 、 B 、 C 皆為二階方陣，已知 $AB = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ -20 & -30 \end{bmatrix}$ ， $AC = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$ ，

$$B+C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}，試求二階方陣 A 。$$