

111 學年度第一學期第一次定期考高三數乙試題

命題範圍：選修數學乙(上)第一章極限與函數

一、單選題（每題 6 分，2 題共 12 分）

1. 若函數 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ，則 $f(f(x))$ 等於下列哪一個選項？

- (1) x (2) $f(x)$ (3) $2f(x)$ (4) $(f(x))^2$ (5) $\frac{2x+1}{2x-1}$

2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-3)^n \times a_n}{2^n - (-3)^n} = \frac{2}{3}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

- (1) 0 (2) 1 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $-\frac{2}{3}$ (5) 不存在

二、多選題（每題 8 分，4 題共 32 分）

（說明：每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。）

1. 設 $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{當 } -1 \leq x < 1 \\ x^2+1, & \text{當 } 1 \leq x < 2 \\ -2x+9, & \text{當 } 2 \leq x < 3 \end{cases}$ ，且 $f(x) = f(x-4)$ ，選出正確的選項。

- (1) $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ (2) $f(\sqrt{2}) = 3$ (3) $f(\sqrt{10}) = 9 - 2\sqrt{10}$ (4) $f(5) = -1$
(5) $f(20) = -1$

2. 關於函數 $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & \text{若 } x \geq 1 \\ x+3, & \text{若 } x < 1 \end{cases}$ ，選出正確的選項：

- (1) $f(1) = 3$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ (3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ (4) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$
(5) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

3. 數列 $a_1, a_2, \dots$ 中，其奇數項是一個公比為 $\frac{1}{3}$ 的等比數列，而偶數項是一個公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，且 $a_1 = 3$ ， $a_2 = 2$ 。試選出正確的選項。

- (1) $a_4 > a_5 > a_6 > a_7$ (2) $\frac{a_{10}}{a_{11}} > 10$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$
 (5) $\sum_{n=1}^{100} a_n > 9$

4. 已知實數數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n-1} a_n$ ， n 為正整數。試選出正確的

- 選項 (1) $a_2 = 3$ (2) $a_4 = 9$ (3) $\langle a_n \rangle$ 為等比數列 (4) $\sum_{n=1}^{20} a_n = 400$
 (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2$

三、填充題（每格 6 分，2 格共 12 分）

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 + 3x - 11| - 1}{|x| - 2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 已知 $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$ ，其中 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，例如：

$[2.3] = 2$ ， $[-2.3] = -3$ 。求： $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \times \left[\frac{1}{x} \right] \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、填充題（每格 7 分，4 格共 28 分）

3. 設無窮等比級數的第二項為 $0.5\overline{3}$ ，第三項為 $0.2\overline{6}$ ，則其和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等差數列。已知 $a_2 + a_4 + a_6 = 186$ ， $a_3 + a_7 = 110$ 。令

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。則極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（請化為最簡分數）

5. 若 a, b 為實數，且 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + ax + b} = 5$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

6. 已知首項為 a ，公比為 r 的無窮等比級數和等於 5；首項為 a ，公比為 $3r$ 的無窮等比級數和等於 7，則首項為 a ，公比為 $2r$ 的無窮等比級數和等於_____。

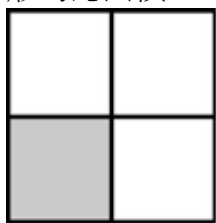
四、混合題（每題 10 分，1 題共 10 分）

1. 有一個面積為 32 的正方形，依以下的步驟將其分割著色。

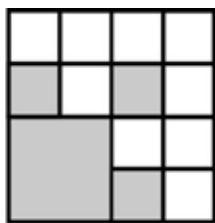
第 1 步驟：將其等分成 4 個小正方形，並將左下角的正方形塗上黑色，如第 1 圖所示。

第 2 步驟：將剩下 3 個正方形再分別等分成 4 個更小的正方形，並將左下角的正方形塗上黑色，如第 2 圖所示。

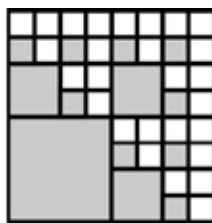
依照這樣的規律繼續分割著色下去，並設 S_n 表示在第 n 步驟後所有黑色正方形的總面積。



第1圖



第2圖



第3圖

(1) 求 S_1, S_2, S_3 。

(2) 求無窮多個黑色正方形的面積總和。

五、證明題（每題 6 分，1 題共 6 分）

1. 設 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$ ，試證有一數 a 在 0 與 1 之間，使得 $f(a) = a$ 。

（提示：證明有理函數的連續性或轉換為多項式方程式。）