

# 北一女中 111 學年度第一學期高三數學(甲)第二次期中考試題 P.1

## 一、多選題 ( 40 分 )

說明：第 1 至 4 題為多選題，每題各有五個選項，其中至少有一個選項是正確的。每題 10 分，各選項 2 分，採獨立計分，整題未作答者得 0 分。

1. 設  $a$  為實數， $f(x) = -x^3 + 12x + a$ ，請選出正確選項。

- (1)  $f(x)$  在區間  $[-2, 2]$  凹口向上。
- (2) 當  $x = 2$  時， $f(x)$  有極小值。
- (3) 當  $-3 \leq x \leq 5$  時， $f(x)$  在  $x = 5$  處發生最小值。
- (4)  $f(x)$  的反曲點為  $(0, 0)$ 。
- (5) 當  $-16 < a < 16$  時， $f(x) = 0$  有三相異實根。

2. 設  $f(x)$  為多項式函數， $a$  為實數，請選出正確選項。

- (1) 若  $f'(a) = 0$ ，則  $f(x)$  在  $x = a$  處發生極值。
- (2) 若  $f(x)$  在  $x = a$  處發生極值，則  $f'(a) = 0$ 。
- (3) 若  $f''(a) = 0$ ，則  $f(x)$  在  $x = a$  為反曲點。
- (4) 若  $f(x)$  在  $x = a$  為反曲點，則  $f''(a) = 0$ 。
- (5) 若  $f'(a) = 0$  且  $f''(a) > 0$ ，則  $f(x)$  在  $x = a$  處發生極值。

3. 設  $f(x)$  為多項式函數，且  $a < b$ ，請選出正確選項。

- (1) 若  $F'(x) = f(x)$ ，則  $\int f(x)dx = F(x)$ 。
- (2) 若  $f(x) > 0$  恆成立，則  $f'(x) > 0$ 。
- (3) 若  $f'(x) > 0$  恆成立，則  $f(x) > 0$ 。
- (4) 在區間  $[a, b]$  中，若  $f(x) > 0$  恆成立，則  $\int_a^b f(x)dx > 0$ 。
- (5) 若  $\int_a^b f(x)dx > 0$ ，則在區間  $[a, b]$  中， $f(x) > 0$  恆成立。

4. 若  $f(x)$  為遞增連續函數，且  $f(0) = 2$ 、 $f(5) = 8$ ，設  $y = f(x)$  的圖形與  $x = 0$ 、 $x = 5$ 、 $x$  軸所圍出之區域為  $R$ ，將區間  $[0, 5]$  平分成  $n$  等分，區域  $R$  的上和為  $U_n$ ，下和為  $L_n$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $L_n \geq 0$
- (2)  $U_{10} \geq U_{20}$
- (3)  $L_{10} \geq L_{20}$
- (4)  $L_{20} \geq U_{10}$
- (5)  $U_{10} - L_{10} = 3$

# 北一女中 111 學年度第一學期高三數學(甲)第二次期中考試題 P.2

## 二、選填題 ( 60 分 )

說明：第 A 至 J 題為選填題，每題 6 分。每題須完全答對才得分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設  $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x+2)(x+4)(x+6)}$ ，經由導數定義計算  $f'(5) = \frac{\textcircled{5}}{\textcircled{6}\textcircled{7}\textcircled{8}}$ 。(請化為最簡分數)

B. 設  $f(x) = (3x-1)^{10}$ ，計算  $f'(0) = \textcircled{9}\textcircled{10}\textcircled{11}$ 。

C. 計算定積分  $\int_{-2}^2 (3x^5 + 5x^4 - x^3 + x) dx = \textcircled{12}\textcircled{13}$ 。

D. 已知三次函數  $f(x)$  的反曲點為  $(2, 5)$ ，在  $x = -1$  時發生極大值為 8，在  $x = \textcircled{14}$  時發生極小值為  $\textcircled{15}$ 。

E. 設  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$  圖形之所有切線中斜率最大的切線方程式為  $y = ax + b$ ，則  $a = \textcircled{16}$ ， $b = \textcircled{17}\textcircled{18}$ 。

F. 設  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，滿足  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 4$ ，已知  $f(x)$  在  $x = 2$  附近的一次近似為  $f(x) \approx mx + k$ ，

則  $m = \textcircled{19}$ ， $k = \textcircled{20}\textcircled{21}$ 。

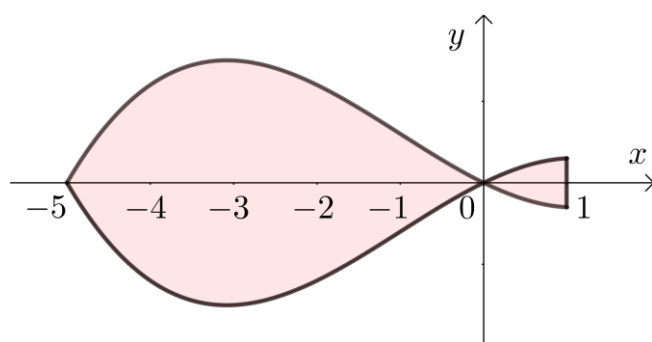
北一女中 111 學年度第一學期高三數學(甲)第二次期中考試題 P.3

G.  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$  的遞增區間為  $[\textcircled{22}, \textcircled{24}]$ 。

H. 設  $f(x)$  為多項式，若  $\int_a^x f(t)dt = x^4 + 2x^2 - 3$ ，其中  $a$  為正數，則  $f(a) = \underline{\textcircled{25}}$ 。

I. 下圖為  $f(x) = \frac{1}{20}(x+5)x(x-2)$ ， $g(x) = -\frac{1}{20}(x+5)x(x-2)$  的部分圖形，則在區間  $[-5, 1]$  中，

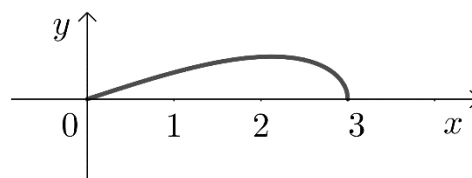
$f(x)$  與  $g(x)$  所圍區域面積為  $\frac{\textcircled{26}\textcircled{27}}{\textcircled{28}}$ 。(請化為最簡分數)



J. 設計師設計了一個墜子，其形狀為  $y = f(x) = \frac{1}{9}x\sqrt{9-x^2}$

(如右圖)與  $x$  軸在  $0 \leq x \leq 3$  所圍區域繞  $x$  軸的旋轉體，

則此墜子的體積為  $\frac{\textcircled{29}}{\textcircled{30}}\pi$ 。(請化為最簡分數)



北一女中 111 學年度第一學期高三數學(甲)第二次期中考

參考答案

| 題號 |    |     |                 | 答案 |    | 題號 |                       | 答案         |                |
|----|----|-----|-----------------|----|----|----|-----------------------|------------|----------------|
| 1  |    | 35  |                 | E  | 16 | 3  | $y = 3x - 8$          |            |                |
| 2  |    | 245 |                 |    | 17 | -  |                       |            |                |
| 3  |    | 4   |                 |    | 18 | 8  |                       |            |                |
| 4  |    | 125 |                 | F  | 19 | 4  | $f(x) \approx 4x - 5$ |            |                |
| A  | 5  | 8   | $\frac{8}{693}$ |    | 20 | -  |                       |            |                |
|    | 6  | 6   |                 |    | 21 | 5  |                       |            |                |
|    | 7  | 9   |                 | G  | 22 | -  | [-3,1]                |            |                |
|    | 8  | 3   |                 |    | 23 | 3  |                       |            |                |
| B  | 9  | -   | -30             |    | 24 | 1  |                       |            |                |
|    | 10 | 3   |                 |    | H  | 25 | 8                     | $f(a) = 8$ |                |
|    | 11 | 0   |                 |    |    | I  | 26                    | 3          | $\frac{39}{4}$ |
| C  | 12 | 6   | 64              |    | 27 |    | 9                     |            |                |
|    | 13 | 4   |                 |    | 28 |    | 4                     |            |                |
| D  | 14 | 5   | $x = 5$         | J  | 29 | 2  | $\frac{2}{5}\pi$      |            |                |
|    | 15 | 2   | 極小值為 2          |    | 30 | 5  |                       |            |                |