

110 學年度第二學期第三次定期考高二數 B 試題

命題範圍：第四章 矩陣與資料表

一、單選題（每題 6 分，共 12 分）

1. 附表為某個購物網站上三種不同的手機 X 、 Y 、 Z 在為期三天的特賣會裡每一天的銷售情況（單位：臺），將此表

	第一天	第二天	第三天
X	20	18	3
Y	16	5	8
Z	19	11	10

以矩陣表示為 $\begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix}$ 。

已知這三種手機 X 、 Y 、 Z 的單價分別為 5、8、10（千元／臺），請問下列哪一個選項的計算結果可以代表在這三天的特賣會裡「每一天手機銷售的總金額」（單位：千元）？

(1) $\begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix}$

(5) $5 \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix}$ 。

2. 設 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $D = P^{-1}AP$ ，若 $A^5P = \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}$ ，
則 $e+f+g+h = ?$ (1) -243 (2) 729 (3) 27 (4) 64 (5) -64。

二、多選題（每題 8 分，共 24 分）

每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 設 A, B 均為 2 階方陣, I 為 2 階單位方陣, 則下列敘述何者正確?
- (1) 若 $A^2 = O$, 則 $A = O$ (2) 若 $A^2 = I$, 則 $A = I$ 或 $A = -I$
 (3) 若 $A^2 = A$, 則 $A = O$ 或 $A = I$ (4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
 (5) 已知 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $ad - bc \neq 0$, 若 $AB = O$, 則 $B = O$ 。
2. 設 $A = \begin{bmatrix} 9 & a \\ 4 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ c & d \end{bmatrix}$, 已知 $AB = \begin{bmatrix} 15 & -2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$ 且 A 的行列式值為 -2 , 試問下列哪些選項是正確的?
- (1) $9b - 4a = 2$ (2) $ac = 48$ (3) $c = -15$
 (4) $\begin{bmatrix} b & -a \\ -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & a \\ 4 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5) B 的行列式值為 $-\frac{65}{2}$
3. 設 A 為實係數二階方陣, 則下列哪些選項中的 A 必有乘法反方陣?
- (1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 其中 x 為任意實數
 (3) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 且 $A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
 (4) 方程組 $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 恰有一組解 $x = 20, y = 5$ 。

三、填充題 (每題 6 分, 共 54 分)

1. 設 $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$, $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$ 且定義 $a_{ij} = 2i^2 - 2j$, $b_{ij} = 4i - 3i^2$, 若 $2X - 3A = 2B$, 則 $X = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 設兩方陣 A, B 滿足 $A + 2B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$, $A - 2B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $X = A^2 - 4B^2$, 則矩陣 X 之所有元素中最大者為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 若矩陣乘法 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, 則 $\begin{bmatrix} e & f \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & v \\ z & y \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ，且 $AX = X + 3A$ ，則矩陣 $X =$ _____。
5. 設 M 是一個 3×2 階矩陣且 $M \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ ， $M \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ，
則 $M \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$ _____。
6. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $A^{12} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a + b + c + d =$ _____。
7. 若 A 為二階方陣， O 為二階零方陣， $A^2 - 6A + I_2 = O$ ， $A^{-1} = aA + bI_2$ ，求數對 $(a, b) =$ _____。
8. 已知矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{13} \\ 3 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$ ，聯立方程式 $\begin{cases} ax + by = 3 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ 的解 $(x, y) =$ _____。
9. 設 $A = 2 \times 2$ 階方陣，且 $A \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -15 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 5 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$ ，
若 $A^{102} \begin{bmatrix} 5 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ， $A^{2013} \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ，則 $a + b + c + d =$ _____。

四、非選題（共 10 分）

1. 已知 A 是二階方陣，且 I 為二階單位方陣，
若 $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，試求：
(1) $A =$ _____。
(2) 滿足 $A^n = I$ 的最小正整數 n 為_____。