

110 學年度第一學期第三次定期考高三數甲試題

命題範圍：第三章積分

第壹部分、多選題（占 20 分）

第 1 題至第 2 題，每題至少有一個選項是正確的。每題全部答對得 10 分，答錯不倒扣，未答者不給分。只答錯一個選項得 6 分，答錯兩個選項得 2 分，答錯三個或三個以上選項不給分。

1. 請選出正確的選項。

$$(1) \int_{-2}^2 1 dx = \int_2^{-2} 1 dx \quad (2) \int_{-3}^3 |x^3| dx = \left| \int_{-3}^3 x^3 dx \right| \quad (3) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi$$

$$(4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 0 \quad (5) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

2. 設 $F(x)$, $f(x)$ 為實係數多項式函數且皆不是常數函數，已知 $F'(x) = f(x)$ ，試選出正確的選項。

$$(1) \text{ 若 } \int_1^3 f(x) dx = 0, \text{ 則 } f(1)f(3) < 0 \quad (2) \text{ 若 } \int_1^2 f(x) dx = 0, \text{ 則 } F(1) = F(2)$$

$$(3) \text{ 若 } a \geq 0, \text{ 則 } F(a) - F(-a) = \int_{-a}^a f(t) dt$$

$$(4) \text{ 若 } \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^2 f(x) dx \right) < 0, \text{ 則存在 } c \in (1, 2) \text{ 滿足 } F(c) = F(0)$$

$$(5) \text{ 若 } f'(x) > x^2 + 1, \text{ 對所有實數 } x \text{ 成立, 則 } \int_0^x f(t) dt \text{ 為遞增函數}$$

第貳部分、填充題（占 66 分）

第 1 題至第 11 題共計 11 格，每格答對得 6 分。

1. 求 $\int_1^2 (x-2)^4 dx$ 的值為 (1)。

2. 設 $f(x)$ 為一個連續函數，已知 $\int_0^5 f(x) dx = 8$ ， $\int_0^1 f(x) dx = 2$ ，求 $\int_1^5 f(x) dx$ 的值為 (2)。

3. 求 $f(x) = 3x^2 - 6x$ 的圖形與 x 軸所圍成之區域面積為 (3)。

4. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [(n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (n+n)^2]$ 的值為____(4)_____。
5. 由直線 $y = 3x$ 與鉛直線 $x = 1$ ， $x = 2$ 及 x 軸所圍成的區域 R ，繞 x 軸做旋轉所形成的旋轉體體積之值為____(5)_____。
6. 試求 $\int_{-2}^2 (|x+1| + |x-2|) dx$ 之值為____(6)_____。
7. 已知某天凌晨 0 時至清晨 6 時氣溫變化的函數 $f(t) = t^2 - 2t + 2$ 恰好是時間 t 的二次函數 ($0 \leq t \leq 6$)，求該天從凌晨 0 時至清晨 6 時之間的平均氣溫為____(7)_____。
8. 已知函數 $f(x)$ 滿足 $\int_1^x f(t) dt = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax + b$ ，自點 $P(1,1)$ 作曲線 $y = f(x)$ 的兩條切線斜率恰好為 1, -1，試求 $f(x)$ 為____(8)_____。
9. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 為實係數三次多項式。已知原點 $(0,0)$ 為函數 $y = f(x)$ 圖形的反曲點，且此圖形在原點的切線為 $y = -2x$ 。若 $a > 0$ 且 $y = f(x)$ 的圖形與直線 $y = 0$ 所圍的區域面積為 8，則 a 之值為____(9)_____。
10. 已知在直角坐標平面上， $A = \{(x, y) | (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ ， $B = \{(x, y) | \sqrt{ax} \leq y, a > 0\}$ ，且 $C = A \cap B$ ，若將圖形 C 繞 x 軸旋轉得一立體的體積為 $\frac{2}{3}\pi$ ，則 a 之值為____(10)_____。
11. 設函數 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 6$ 且 $0 < a \leq 2$ ，令此函數在區間 $0 \leq x \leq t$ 的最小值為 $S(t)$ ，試求 $\int_0^2 S(t) dt$ 的最小值為____(11)_____。

第參部分、計算題（占 14 分）

請在作答區內作答。非選擇題請由左而右橫式書寫，必須寫出計算與討論分析過程或理由，否則將酌予扣分。

1. 已知函數 $y = x^2$ 與 $y = -2x + 15$ 所圍成之圖形在 $x = t$ 與 $x = t + 1$ ($-5 \leq t \leq 2$) 之間的區域面積為 $S(t)$ ，試回答下列問題
- (1) 試以 t 表示區域面積 $S(t)$ 。(7 分)
- (2) 求出面積 $S(t)$ 的最大值。(7 分)