

# 110 學年度第二學期第二次定期考高三數乙試題

## 命題範圍：機率與統計 II

### 一、多重選擇題（每題 10 分，共 30 分）

每題全對者，得 10 分；錯 1 個選項者，得 5 分；錯 2 個選項以上或未作答者，該題得 0 分。

1. 下列是有關隨機變數的敘述，請選出正確的選項。

(A) 任意一個隨機變數  $X$ ，均可視為一個由樣本空間  $S$  對應到實數的函數，而  $X$  的可能值就是那些在函數值域中的數

(B) 給定一個隨機變數  $X$ ，則其變異數為  $\text{Var}(X) = [E(X)]^2 - E(X^2)$

(C) 已知一個隨機變數  $X$  的所有可能值為  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，其對應的機率為

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \text{ 則 } \sum_{k=1}^n p_k = 1$$

(D) 已知一個隨機變數  $X$  的所有可能值為  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，其對應的機率為

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \text{ 則 } E(X) = \sum_{k=1}^n (x_k \cdot p_k)$$

(E) 已知一個隨機變數  $X$  的所有可能值為  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，其對應的機率為

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \text{ 且令 } \mu = E(X), \text{ 則 } \text{Var}(X) = \sum_{k=1}^n [(x_k - \mu) \cdot p_k]^2$$

2. 設隨機變數  $X \sim B(40, 0.2)$ ，請選出正確的選項。

(A) 隨機變數  $X$  的機率質量函數圖形，最高點只有一個

(B) 隨機變數  $X$  的機率質量函數圖形，左右對稱

(C) 隨機變數  $X$  的機率質量函數圖形，在  $X = 8.2$  時機率最大

(D) 隨機變數  $X$  的機率質量函數圖形，從左至右是先遞增再遞減

(E) 隨機變數  $X$  的機率質量函數圖形，往  $X = 40$  集中

3. 已知隨機變數  $X \sim B(25, 0.4)$ ，請選出正確的選項。

(A) 隨機變數  $X$  的機率分布為二項分布

(B) 隨機變數  $X$  的期望值為10

(C) 隨機變數  $X$  的標準差為6

(D) 隨機變數  $X$  的變異數為  $\text{Var}(X) = \sum_{k=0}^{25} (k-10)^2 C_k^{25} (0.4)^k (0.6)^{25-k}$ ，

其中  $k = 0, 1, 2, \dots, 25$

(E) 隨機變數  $X$  的機率質量函數為  $P(X = k) = (0.4)^k (0.6)^{25-k}$ ，

其中  $k = 0, 1, 2, \dots, 25$

## 二、填充題（第4題10分，其餘每格5分，共55分）

1. 丟一個公正的銅板6次，令  $X$  表示6次中出現正面的次數，則：

(1)  $P(3 \leq X \leq 5) =$  \_\_\_\_\_。 (2)  $\text{Var}(X) =$  \_\_\_\_\_。

2. 若  $P(x) = k(0.1)^x$  是一個機率質量函數 ( $x \in \mathbb{N}$ )，則  $k$  之值為\_\_\_\_\_。

3. 依統計資料知，一個50歲的人在一年內存活的機率為98.5%，今有一個50歲的人參加一年期保險額度為九十萬元的意外保險，須繳保費兩萬元，則不計其他成本之下，保險公司獲利的期望值為\_\_\_\_\_元。

4. 投擲兩顆公正的正八面骰(點數為1~8)，以點數差的絕對值為隨機變數  $X$ ，請利用下表完成  $X$  的機率質量函數。

| $k$        | 0                  | 1                  | 2                  | 3                  | 4                  | 5                  | 6                  | 7                  |
|------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $P(X = k)$ | $\frac{\quad}{64}$ | $\frac{\quad}{64}$ | $\frac{\quad}{64}$ | $\frac{\quad}{64}$ | $\frac{\quad}{64}$ | $\frac{\quad}{64}$ | $\frac{\quad}{64}$ | $\frac{\quad}{64}$ |

5. 丟一枚不公正硬幣10次，若「恰得兩次正面」之機率為「恰得一次正面」之機率的5倍。則丟此不公正硬幣一次，出現正面的機率為\_\_\_\_\_。

6. 已知投擲「公正硬幣」及「古怪硬幣」其出現正面的機率分別為  $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{3}{4}$ ，小建 不確定自己拿到其中哪種硬幣，決定投擲 5 次並採用以下準則來判定：

若正面次數不多於 3 次，則判定為「公正硬幣」；

若正面次數多於 3 次，則判定為「古怪硬幣」。

(1) 若小建拿到「公正硬幣」，則他判定正確的機率為\_\_\_\_\_。

(2) 若小建拿到「古怪硬幣」，則他判定正確的機率為\_\_\_\_\_。

7. 設隨機變數  $X$  表示投擲一不公正骰子出現的點數， $P(X = k)$  表示隨機變數  $X$  取值為  $k$  的機率。已知  $X$  的機率質量函數如下表：（ $x, y$  為未知常數）

|            |     |     |     |     |     |     |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $k$        | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
| $P(X = k)$ | $x$ | $y$ | $y$ | $y$ | $x$ | $y$ |

又知  $X$  的期望值為  $\frac{18}{5}$ ，則：

(1) 數對  $(x, y) =$ \_\_\_\_\_。(2)  $X$  的變異數為\_\_\_\_\_。

### 三、計算證明題（共 15 分）

需詳述過程否則不予計分

1. 有  $A$ 、 $B$  兩個題目，答對時獲得的獎金分別為 2000 元及 7000 元，答題的規則是需要先選擇其中一題回答，若答對才能再答另外一題。已知小國答對  $A$ 、 $B$  兩個题目的機率分別為 0.5、0.3，請回答下列問題：
- (1) 小國先答  $A$  題與先答  $B$  題，可得獎金的期望值分別為多少元？（5 分）
- (2) 若可調整  $A$  題的獎金，使小國兩種選擇可獲得獎金的期望值相同，則  $A$  題獎金應調整為多少元？（5 分）
- (3) 若小國在  $A$  題的答題機率可改變，則欲使兩個選擇可獲得獎金的期望值相同，則小國在  $A$  題的答題機率應變為多少？（5 分）