

110 學年度第一學期第一次定期考高三數甲試題

命題範圍：第一章數列與函數的極限

※本份考卷中提到的「數列」都是指「擁有無窮多項的數列」

壹、多選題（共 3 題，每題 10 分）

每題至少有一個選項是正確的，全對得 10 分，只答錯一個選項得 6 分，只答錯二個選項得 2 分，不作答或答錯三個以上(含三個)選項得 0 分。

1. 設 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle, \langle c_n \rangle$ 為三個實數數列，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 若對於任何正整數 n 皆有 $a_n \times b_n = c_n$ ，而數列 $\langle a_n \rangle$ 和 $\langle b_n \rangle$ 皆為收斂數列，則數列 $\langle c_n \rangle$ 是收斂數列
- (2) 若對於任何正整數 n 皆有 $a_n \times b_n = c_n$ ，而數列 $\langle a_n \rangle$ 是收斂數列，數列 $\langle b_n \rangle$ 是發散數列，則數列 $\langle c_n \rangle$ 是發散數列
- (3) 若對於任何正整數 n 皆有 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ，而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$
- (4) 若對於任何正整數 n 皆有 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ，而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 3$ ，則數列 $\langle b_n \rangle$ 可能是收斂數列也可能是發散數列
- (5) 若對於任何正整數 n 皆有 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ，而數列 $\langle a_n \rangle$ 和 $\langle c_n \rangle$ 皆為發散數列，則數列 $\langle b_n \rangle$ 一定是發散數列

2. 設實數 α 滿足 $0 < \alpha < 4$ ，而數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n = \frac{3+5 \cdot \alpha^n}{3+\alpha^n}$ ，其中 n 為任意正整數，試問下列哪些選項可能是數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限值？

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

3. 設函數 $f: R \rightarrow R$ ，函數 $g: R \rightarrow R$ ，試問下列哪些選項是正確的？
- (1) 若對於任何實數 x 皆有 $f(x) = |g(x)|$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 連續，則 $g(x)$ 在 $x=0$ 連續
 - (2) 若對於任何實數 x 皆有 $f(x) \cdot g(x) = 1$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 連續，則 $g(x)$ 在 $x=0$ 連續
 - (3) 若 $f(x), g(x)$ 皆在 $x=0$ 連續且定義 $h(x) = f(x) + g(x)$ ，則 $h(x)$ 在 $x=0$ 連續
 - (4) 若 $f(x), g(x)$ 皆在 $x=0$ 連續且定義 $h(x) = (f \circ g)(x)$ ，則 $h(x)$ 在 $x=0$ 連續
 - (5) 若 $f(x), g(x)$ 互為反函數且 $f(3) = g(2)$ ，則 $f(2) = g(3)$

貳、填充題（共 12 格，每格 5 分）

1. 考慮下列各小題中的數列極限，若數列的極限存在，則填入極限值，若數列的極限不存在，則填入不存在。
 - (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 8n + 16}{n + 2} - \frac{n^2 - 4n - 16}{n + 3} \right) = \underline{\hspace{2cm}} (1) \text{ }^\circ$
 - (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} \right) = \underline{\hspace{2cm}} (2) \text{ }^\circ$
2. 設 $A = \sum_{k=1}^{14} k(k+2)$ ， $B = \sum_{k=1}^{14} k^3$ ，將分數 $\frac{A}{B}$ 化簡成為最簡分數 $\frac{q}{p}$ ，其中 p, q 為互質的兩正整數，試問 $p+q$ 的值為 $\underline{\hspace{2cm}} (3) \text{ }^\circ$
3. 設 a 和 r 皆為非零實數，已知無窮等比級數 $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ 的和為 57，無窮等比級數 $a + ar^3 + ar^6 + ar^9 + \cdots$ 的和為 27，試問實數 r 的值為 $\underline{\hspace{2cm}} (4) \text{ }^\circ$
4. 已知對於每一個正整數 n ，數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $2n+3 \leq na_n \leq 2n+5$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}} (5) \text{ }^\circ$
5. 設函數 $f: \{x | 1 \leq x \leq 6, x \in R\} \rightarrow R$ 且 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 21}$ ，已知函數 $f(x)$ 的值域為 $\{y | m \leq y \leq M, y \in R\}$ ，其中 M, m 為實數，試問 $M+m$ 的值為 $\underline{\hspace{2cm}} (6) \text{ }^\circ$

6. 設函數 $f: R \rightarrow R$ ，函數 $g: R \rightarrow R$ ，若對於任何實數 x 皆有 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ ，則稱 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互為反函數。已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互為反函數， $f(x) = 101x + 2021$ ， $g(x) = ax + b$ ，其中 a, b 為實數，試問 $a + b$ 的值為 (7)。

7. 考慮下列各小題中的函數極限，若函數的極限存在，則填入極限值，若函數的極限不存在，則就填入不存在。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x+3}{x+1} - \frac{5x+6}{x+4} \right) = \underline{(8)} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \left(\frac{x^4-16}{x-2} - 32 \right) = \underline{(9)}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 2x| + 3x - 6}{x - 1 - [x]} = \underline{(10)} \quad (\text{高斯符號 } [x] \text{ 為不大於 } x \text{ 的最大整數})$$

8. 設函數 $f: R \rightarrow R$ 且 $f(x) = \begin{cases} ax+1, & \text{if } x \geq 2 \\ x^2+b, & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ -x^3+a, & \text{if } x < 1 \end{cases}$ ，其中 a, b 為實數，已知

函數 $f(x)$ 為連續函數，試問 $a + b$ 的值為 (11)。

9. 設 $f(x)$ 為多項式函數且次數為三次，滿足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -7$ ， $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 10$ ，試問函數值 $f(0)$ 的值為 (12)。

參、計算證明題 (共 10 分)

第(1)小題只看答案，答對得 2 分，否則得 0 分；第(2)小題必須要有過程，否則不予計分

1. 設函數 $f: R \rightarrow R$ 且 $f(x) = x^4 \times 3^x - 2$ $f(x) = x^4 \times 3^x - 2$ ，已知 $f(x)$ 是連續函數，試回答下列各小題：

(1) $f(x) = 0$ 的實根情況為下列哪一個選項。(單選題) (2 分)

(A) 沒有實根 (B) 所有的實根皆為正實根

(C) 所有的實根皆為負實根 (D) 有正實根也有負實根

(2) 承(1)，請證明 $f(x) = 0$ 的實根情況為何是(1)你選的那個選項。(8 分)