

臺北市立第一女子高級中學 110 學年度第一學期高三文組數學科第二次期中考試題

一、單選題（每題 6 分，共 24 分）

- 某量販店進行鮮奶促銷活動，只要購買任一品項鮮奶，皆可參加一次抽獎活動，且每次抽獎的結果都是獨立的。該量販店宣稱中獎率為 8 成，小綠欲於促銷活動的 2 週內，每天都購買一次鮮奶。若購買的 14 次中，中獎次數小於或等於 k 次的機率小於 0.01，即拒絕接受量販店宣稱的中獎率。設隨機變數 X 代表「14 次抽獎活動中，中獎的次數」，且 $P(X = x)$ 和 $P(X \leq x)$ 的機率分布表如下所示。試求 k 的值最大為下列何者？
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

隨機變數 X 的機率分布表 ($X \sim B(14, 0.8)$) (表格內各項機率值均取三位有效數字)

次數 x	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x)$	1.64×10^{-10}	9.18×10^{-9}	2.39×10^{-7}	3.82×10^{-6}	4.20×10^{-5}	3.36×10^{-4}	2.02×10^{-3}	9.21×10^{-3}
$P(X \leq x)$	1.64×10^{-10}	9.34×10^{-9}	2.48×10^{-7}	4.06×10^{-6}	4.60×10^{-5}	3.82×10^{-4}	2.40×10^{-3}	0.0116
次數 x	8	9	10	11	12	13	14	
$P(X = x)$	0.0322	0.0860	0.172	0.250	0.250	0.154	0.044	
$P(X \leq x)$	0.0439	0.130	0.302	0.552	0.802	0.956	1	

- 小賢每天都會去游泳池游 30 分鐘，並以 100 公尺為單位游泳，假設 30 分鐘內小賢游 900 公尺的機率是 $\frac{1}{4}$ ，游 1000 公尺的機率是 $\frac{1}{2}$ ，游 1100 公尺的機率是 $\frac{1}{4}$ ，設隨機變數 X 為每次 30 分鐘內小賢游泳的距離，則 X 的標準差約為多少公尺？
(A) 50 (B) 60 (C) 70 (D) 80 (E) 90
- 在坐標空間中給定兩點 $A(1, 2, 1)$ 與 $B(5, 4, 5)$ 。令 S 為 xy 平面上所有使得向量 $\overrightarrow{PA}$ 垂直於向量 $\overrightarrow{PB}$ 的 P 點所成的集合，則下列選項何者正確？
(A) S 為空集合 (B) S 恰含一點 (C) S 恰含兩點 (D) S 為一線段 (E) S 為一圓
- 甲乙兩人參加一個射擊遊戲，已知甲射擊命中率是 80%、乙射擊命中率是 75%，且兩人射擊狀況不會互相影響。遊戲方式是每局甲乙兩人各射擊一發，如果兩人均命中則稱該局「成功」，只要有人沒命中該局就算「失敗」。若兩人參加 N 局遊戲，已知他們「至少有一局成功」的機率超過 0.999，則 N 的最小值為？
($\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$)
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

二、多選題（每題 8 分，錯一個選項扣 2 分，至該題分數扣完為止，未作答者不計分，共 32 分）

- 甲、乙兩人猜拳，設每次猜拳時甲贏的機率為 p ，若每次猜拳時的結果都是獨立的。試選出正確的選項。
(A) 假設只有甲贏和乙贏兩種結果，猜拳 200 次，若甲贏的期望值為 50 次，則乙贏的期望值為 150 次
(B) 若 $p = \frac{1}{3}$ ，則直到第 4 次甲才猜贏的機率小於 $\frac{1}{10}$
(C) 若前兩次都是甲贏的條件下，第三次甲贏的機率為 $\frac{1}{27}$ ，則 $p = \frac{1}{3}$
(D) 若猜拳 200 次，且甲贏的次數期望值為 50 次，則 $p = \frac{1}{4}$
(E) 若猜拳 200 次，且甲贏的次數標準差為 $\frac{20}{3}$ 次，則 $p = \frac{1}{3}$ 。
2. 在坐標空間中，下列哪些選項與直線 $L: \begin{cases} x+3y+2z=13 \\ 2x+z=5 \end{cases}$ 表同一圖形？

(A) $\begin{cases} x=-2t \\ y=1-2t \\ z=5+4t \end{cases}, t \in R$ (B) $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3-2t \end{cases}, t \in R$ (C) $x-2=y-3=\frac{1-z}{2}$ (D) $x+y+z=6$ (E) $\begin{cases} x+3y+2z=13 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 。

3. 空間中有一四面體 $ABCD$ 。假設 $\overrightarrow{AD}$ 分別與 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，請選出正確的選項。

(A) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overline{DA}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (B) 若 $\angle BDC$ 是直角，則 $\angle BAC$ 是直角

(C) 若 $\angle BDC$ 是銳角，則 $\angle BAC$ 是銳角 (D) 若 $\angle BDC$ 是鈍角，則 $\angle BAC$ 是鈍角

(E) 若 $\overline{AB} < \overline{DA}$ 且 $\overline{AC} < \overline{DA}$ ，則 $\angle BDC$ 必為銳角。

4. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，矩陣 $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，單位方陣 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，請選出正確的選項。

(A) 若 k 是正整數，則 $A^{2k} = I$

(B) 若 k 是正整數，則 $B^{2k} = I$

(C) $AB = BA$

(D) $A^6 B = BA^6$

(E) $AB^4 A^3 = BA^4 B^3$ 。

三、填充題（共 44 分，答對格數與得分對應如下表）

答對格數	1	2	3	4	5	6	7
得分	8	16	24	30	36	40	44

1. 袋中有 1 顆紅球和 2 顆白球，每次從袋中取一球，取後放回，若每球被取中的機會均等，設共取 5 次，則取中紅球的次數至少 2 次的機率為_____。

2. 若同時擲兩枚硬幣一次，已知其中一枚為公正硬幣（擲出正、反面機率各為 $\frac{1}{2}$ ），另一枚硬幣擲出正面機率為 p 。若每一枚硬幣擲出正面記為 1 分，擲出反面記為 0 分，設隨機變數 X 代表同時擲兩枚硬幣一次的分數總和，且 $P(X = x)$ 為 X 的機率質量函數，若 $P(X = 0) = 3P(X = 2)$ ，則 $p =$ _____。

3. 袋中有白色和黑色兩種顏色的球，只知道這兩種顏色的球其中一色有 3 顆，另一色有 1 顆。今從袋中任取一球，記錄顏色後放回袋中，假設每球被取中的機會均等，若連續取球 5 次，黑球被取中的次數超過3 次，則判定袋中的球是 3 黑 1 白，反之，則判定袋中的球是 1 黑 3 白。試問：若袋中實際上有 1 黑球、3 白球，則依此方法正確判定袋中黑、白兩色球數的機率為_____。

4. 已知矩陣 $N = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，若 $N^6 = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$ ，試求 $(x, y) =$ _____。

5. 小俊參加班際籃球賽，第一球投進的機率是 0.6，第二球以後投進的機率如下：如果他前一球投進，則下一球投進的機率是 0.7；若是他前一球投不進，則下一球投進的機率是 0.5。試問：

(1) 若第 n 球投進的機率為 x_n ，投不進的機率為 y_n ，且滿足 $\begin{bmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ ，則 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$ _____。

(2) 若已知小俊第三球投進的條件下，則他第一球投進的機率為_____。

6. 空間中四點 $A(2, 0, 0)$ 、 $B(0, 3, 0)$ 、 $C(0, 0, 4)$ 、 $D(x, y, z)$ ，若 $D(x, y, z)$ 滿足 $x^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 = 61$ ，則四面體 $ABCD$ 體積的最大值為_____。

北一女中 110 學年度第一學期高三文組數學科第二次期中考答案卷

班別_____座號_____姓名_____得分_____

一、單選題（每題 6 分，共 24 分）

1.	2.	3.	4.
B	C	B	C

二、多重選擇題（每題 8 分，錯一個選項扣 2 分，至該題分數扣完為止，未作答者不計分，共 32 分）

1.	2.	3.	4.
ABD	ABCE	ADE	BDE

三、填充題（共 44 分，答對格數與得分對應如下表）

答對格數	1	2	3	4	5	6	7
得分	8	16	24	30	36	40	44

1.	2.	3.	4.
$\frac{131}{243}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{63}{64}$	(1, -12)
5.(1)	5.(2)	6.	
$\begin{bmatrix} 0.64 & 0.6 \\ 0.36 & 0.4 \end{bmatrix}$	$\frac{8}{13}$	24	