

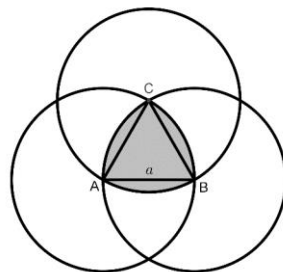
# 110 學年度第一學期第一次定期考高二數 A 試題

命題範圍：第一章三角函數

## 一、單選題（每題6分，共24分）

1. 如圖， $\triangle ABC$  是一個邊長為  $a$  的正三角形分別以  $A, B, C$  為圓心， $a$  為半徑作三圓，此三圓共同部分稱為勒洛三角形(Reuleaux triangle)，是一個定寬曲線，由十九世紀的德國工程師 Franz Reuleaux 命名，則此勒洛三角形的面積為下列哪一個選項？

- (1)  $\frac{1}{6}(\pi - \sqrt{3})a^2$       (2)  $\frac{1}{4}(\pi - \sqrt{3})a^2$   
(3)  $\frac{1}{4}(\pi + \sqrt{3})a^2$       (4)  $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})a^2$   
(5)  $\frac{1}{2}(\pi + \sqrt{3})a^2$ 。



2. 設  $0 \leq \pi \leq \frac{\pi}{2}$ ，若  $3\cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta$  的最大值為  $M$ ，最小值為  $m$ 。

選出正確的選項。

- (1)  $M = 2 + \sqrt{2}$ ， $m = 3$       (2)  $M = 3$ ， $m = 2 - \sqrt{2}$   
(3)  $M = 2 + \sqrt{2}$ ， $m = 2 - \sqrt{2}$       (4)  $M = 3$ ， $m = 1$   
(5)  $M = 2$ ， $m = 1$ 。
3. 若  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ，則方程式  $\cos 2x = \frac{x}{6}$  有幾個實數解？  
(1) 5   (2) 6   (3) 7   (4) 8   (5) 9。
4. 設  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ， $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ，且  $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ， $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ ，則  $\cos(2\alpha + \beta)$  之值為下列哪一個選項？  
(1) 0   (2)  $\frac{\sqrt{5}}{25}$    (3)  $\frac{7\sqrt{5}}{25}$    (4)  $-\frac{11\sqrt{5}}{25}$    (5)  $-\frac{24}{25}$ 。

## 二、多選題（每題8分，共32分）

每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得8分；答錯1個選項者，得5分；答錯2個選項者，得2分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 選出正確的選項。

(1)  $\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos 3 < 1$       (2)  $\frac{1}{2} < \sin 2 < \frac{\sqrt{3}}{2}$       (3)  $\frac{1}{\sqrt{3}} < \tan 1 < \sqrt{3}$

(4)  $\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos \pi^\circ < 1$       (5)  $0 < \sin \pi^2 < 1$ 。

2. 在坐標平面上，經由下列哪些選項的作圖過程，可以得到與函數

$y = \sin\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)$  完全重疊的圖形。

(1) 將  $y = \sin x$  的圖形先沿  $x$  軸方向水平伸縮  $\frac{1}{2}$  倍，再向左平移  $\frac{4\pi}{3}$  單位

(2) 將  $y = \sin x$  的圖形先向左平移  $\frac{4\pi}{3}$  單位，再沿  $x$  軸方向水平伸縮  $\frac{1}{2}$  倍

(3) 將  $y = \sin x$  的圖形先沿  $x$  軸方向水平伸縮  $\frac{1}{2}$  倍，再向左平移  $\frac{2\pi}{3}$  單位

(4) 將  $y = \sin x$  的圖形先向右平移  $\frac{2\pi}{3}$  單位，再沿  $x$  軸方向水平伸縮  $\frac{1}{2}$  倍

(5) 將  $y = \sin x$  的圖形先沿  $x$  軸方向水平伸縮  $\frac{1}{2}$  倍，再向右平移  $\frac{\pi}{3}$  單位。

3. 如圖為函數  $f(x) = a \sin(bx + c) + d$  的部分圖形，

其中  $a > 0$ ， $b < 0$ ， $|c| < \pi$ 。選出正確的選項。

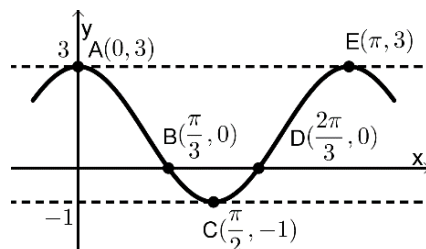
(1)  $a = 2$

(2)  $b = -1$

(3)  $c$  的值不唯一

(4)  $d = 3$

(5) 函數  $y = a \sin(-bx + c) + d$  的圖形與函數  $f(x)$  的圖形相同。



4. 下列哪些函數圖形的最小正週期為  $\pi$ 。選出正確的選項。

(1)  $y = 3 \sin 2x$

(2)  $y = \cos^2 x$

(3)  $y = 3 \sin x + 4 \cos x$

(4)  $y = |\tan x|$

(5)  $y = |\sin x - \cos x|$ 。

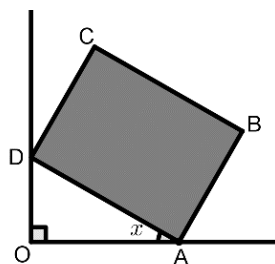
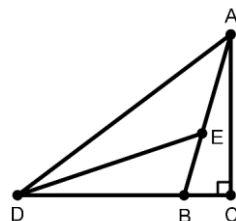
### 三、填充題（每題6分，共30分）

每題完全答對者，得6分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

1. 已知函數  $y = 2 \sin(bx + c)$ ， $(b > 0, |c| < \frac{\pi}{2})$  的圖形關於直線  $x = \frac{5\pi}{12}$  對稱，且

圖形上相鄰兩個最高點的距離為  $\frac{2\pi}{3}$ ，則數對  $(b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

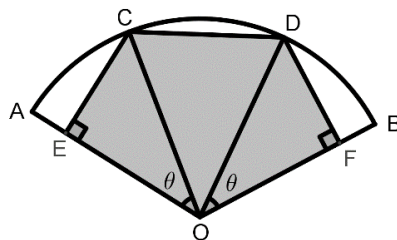
2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊長分別為 $a, b, c$ ，且 $a = 20$ ， $\cos A = -\frac{3}{5}$ ， $\cos B = \frac{24}{25}$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積之值為\_\_\_\_\_。
3. 已知直線 $L$ 過點 $(1, 2)$ ，且與直線 $3x + 4y = 5$ 之銳夾角為 $\frac{\pi}{4}$ ，則直線 $L$ 的方程式為\_\_\_\_\_（兩解）。
4. 如圖，設直角 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC} = 24$ ， $\overline{AB} = 25$ ， $\angle C$ 為直角，延長 $\overline{BC}$ 至點 $D$ 使 $\overline{BD} = \overline{BA}$ ，且 $\angle ADB$ 的內角平分線交 $\overline{AB}$ 於點 $E$ ，設 $\angle EDB = \theta$ ，則 $\sin 3\theta$ 之值為\_\_\_\_\_。
5. 如圖，一長方體箱子穩定斜靠在牆壁上，且其側面 $ABCD$ 為矩形，已知 $\overline{AB} = 30$ ， $\overline{AD} = 40$ ，且牆角 $\angle DOA$ 為直角，設 $\angle DAO = x$ 度， $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ ，若 $C$ 點到地面的距離為48，則此時的 $\cos x$ 之值為\_\_\_\_\_。



#### 四、計算證明題（每題14分，共32分）

請寫出計算或證明過程，否則不予計分。

1. 如圖，已知扇形 $AOB$ 的圓心角 $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$ ，半徑為1， $C, D$ 是弧 $AB$ 上的兩個動點，且滿足 $\angle AOC = \angle BOD = \theta$ ， $(0 < \theta < \frac{\pi}{3})$ 。若 $\overline{CE} \perp \overline{OA}$ 於 $E$ 點， $\overline{DF} \perp \overline{OB}$ 於 $F$ 點。



試回答下列問題：

- (1) 將三角形 $\triangle OCD$ 的面積表示為 $a \sin 2\theta + b \cos 2\theta$ ，求實數 $a, b$ 之值。（6分）
- (2) 將五邊形 $OECD F$ 的面積表示為 $p \sin(2\theta + \alpha)$ 的形式，其中 $p > 0$ ， $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ ，求 $\alpha$ 之值。（4分）
- (3) 求五邊形 $OECD F$ 面積的最大值。（4分）