

台北市立第一女子高級中學 110 學年度第一學期高三理組第二次期中考試數學科試題

一、單選題（每題 5 分，共 20 分）

1. 設 $F_1(2,4)$ 、 $F_2(2,0)$ 為一雙曲線的兩焦點，且貫軸長為 2，則下列何者為此雙曲線的方程式？

(A) $\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$ (B) $\frac{(y-2)^2}{1} - \frac{(x-2)^2}{3} = 1$ (C) $\frac{(y-2)^2}{3} - \frac{(x-2)^2}{1} = 1$
(D) $\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ (E) $\frac{(y-2)^2}{1} - \frac{(x-2)^2}{5} = 1$

2. 大樂透彩券的遊戲是由玩家從 01~49 中任選 6 個號碼進行投注。開獎時，開獎單位將隨機開出 6 個號碼，若玩家所選擇的號碼與開獎單位所開出的 6 個號碼完全相同（不考慮順序），則可中頭獎。若阿倫決定每一期都買一張大樂透彩券，直到中頭獎為止才會停止買大樂透，則阿倫購買大樂透次數的期望值最接近下列哪一個選項？

(A) 1.4×10^3 (B) 1.4×10^4 (C) 1.4×10^5 (D) 1.4×10^6 (E) 1.4×10^7

3. 小綠每天都會去游泳池游 30 分鐘，已知泳道長 50 公尺，小綠都以來回一趟 100 公尺為單位游泳，設 30 分鐘內小綠來回游 9 趟的機率是 $\frac{1}{4}$ ，來回游 10 趟的機率是 $\frac{1}{2}$ ，來回游 11 趟的機率是 $\frac{1}{4}$ ，設隨機變數 X 為每次 30 分鐘內小綠游泳的距離，則 X 的標準差約為多少公尺？

(A) 50 (B) 60 (C) 70 (D) 80 (E) 90

4. 設橢圓 $\Gamma: A(x+5)^2 + B(y-2)^2 = 1$ 的兩焦點 F_1 和 F_2 在直線 $x+5=0$ 上，且 $\overline{F_1F_2} = 2$ ，關於 A 和 B 的關係，試選出正確的選項。

(A) $A+B=1$ (B) $A-B=1$ (C) $B-A=1$ (D) $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = 1$ (E) $\frac{1}{B} - \frac{1}{A} = 1$

二、多選題（每題 10 分，共 20 分）

1. 關於下列選項中的方程式所代表的圖形，哪些正確？

(A) $x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 24 = 0$ 的圖形為橢圓

(B) $x^2 - 2y^2 - 8x - 8y + 24 = 0$ 的圖形為雙曲線

(C) $(x-3y)(x+3y)+2=0$ 的圖形為雙曲線

(D) $y^2 - x + y = 0$ 的圖形為開口向右的拋物線

(E) $|x-3| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 為開口向下的拋物線

2. 甲、乙兩人猜拳，設每次猜拳時甲贏的機率為 p ，若每次猜拳時的結果都是獨立的。試選出恆為正確的選項。
- (A) 假設只有甲贏和乙贏兩種結果，猜拳 200 次，若甲贏的期望值為 50 次，則乙贏的期望值為 150 次
- (B) 若 $p = \frac{1}{3}$ ，則直到第 4 次甲才猜贏的機率小於 $\frac{1}{10}$
- (C) 若直到甲猜贏才停止猜拳，而猜拳次數的變異數為 6，則 $p = \frac{1}{3}$
- (D) 若猜拳 200 次，且甲贏的次數期望值為 50 次，則 $p = \frac{1}{4}$
- (E) 若猜拳 200 次，且甲贏的次數標準差為 $\frac{20}{3}$ 次，則 $p = \frac{1}{3}$

三、填充題（每題 6 分，共 60 分）

1. 袋中有 1 顆紅球和 3 顆白球，每次從袋中取一球，取後放回，若每球被取中的機會均等，設共取 5 次，則取中紅球的次數至少 2 次的機率為_____
2. 若同時擲兩枚硬幣一次，已知其中一枚為公正硬幣（擲出正、反面機率各為 $\frac{1}{2}$ ），另一枚硬幣擲出正面機率為 p 。若每一枚硬幣擲出正面記為 1 分，擲出反面記為 0 分，設隨機變數 X 代表同時擲兩枚硬幣一次的分數總和，且 $P(X = x)$ 為 X 的機率質量函數，若 $P(X = 0) = 3P(X = 2)$ ，則 $p = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 某量販店進行鮮奶促銷活動，只要購買任一品項鮮奶，皆可參加一次抽獎活動，每次抽獎的結果都是獨立的。量販店宣稱中獎率為 8 成，小綠欲於促銷活動的 2 週內，每天都購買一次鮮奶，若購買的 14 次中，中獎次數小於或等於 k 次的機率小於 0.01，即拒絕接受量販店宣稱的中獎率。設隨機變數 X 代表 14 次抽獎活動中，中獎的次數，且 $P(X = x)$ 和 $P(X \leq x)$ 的機率分布表如下所示。試求： k 的值最大為_____

隨機變數 X 的機率分布表 ($X \sim B(14, 0.8)$)

次數 x	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x)$	1.64×10^{-10}	9.18×10^{-9}	2.39×10^{-7}	3.82×10^{-6}	4.20×10^{-5}	3.36×10^{-4}	2.02×10^{-3}	9.21×10^{-3}
$P(X \leq x)$	1.64×10^{-10}	9.34×10^{-9}	2.48×10^{-7}	4.06×10^{-6}	4.60×10^{-5}	3.82×10^{-4}	2.40×10^{-3}	0.0116
次數 x	8	9	10	11	12	13	14	
$P(X = x)$	0.0322	0.0860	0.172	0.250	0.250	0.154	0.044	
$P(X \leq x)$	0.0439	0.130	0.302	0.552	0.802	0.956	1	

4. 袋中有白色和黑色兩種顏色的球，只知道這兩種顏色的球其中一色有 3 顆，另一色有 1 顆。今從袋中任取一球，記錄顏色後放回袋中，假設每球被取中的機會均等，若連續取球 5 次，黑球被取中的次數超過 3 次，則判定袋中的球是 3 黑 1 白，反之，則判定袋中的球是 1 黑 3 白。試問：若袋中實際上有 1 黑球、3 白球，則依此方法正確判定袋中黑、白兩色球數的機率為_____。
5. 方程式 $\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = \frac{|3x - 4y - 12|}{5}$ 的圖形，焦距為_____。
6. 有一圖形 $\Gamma: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的焦點為 F_1 和 F_2 ，已知焦弦 $\overline{AB}$ 長為 20，且 $\overline{AB}$ 通過 F_2 ，則 $\triangle ABF_1$ 的周長為_____。
7. 若 k 為整數，且 $\frac{x^2}{k+4} + \frac{y^2}{9-k} = 1$ 為橢圓， $\frac{x^2}{2k} + \frac{y^2}{5-k} = 1$ 為雙曲線，則 k 的值有_____種可能。
8. 設方程式 $(x-a)^2 = 12(y+2)$ 圖形的頂點為 A ，正焦弦為 $\overline{BC}$ ，且直線 $AB: x+by=3$ ，設 $b>0$ ，則數對 $(a,b) =$ _____。
9. 試問：橢圓 $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1$ 的任一點 P ，到直線 $5x-12y+3=0$ 的距離最大值為_____。
10. 將雙曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$ 以原點為中心逆時針方向旋轉 45° 得到雙曲線 $\Gamma': ax^2 + bxy + cy^2 = 15$ ，求序列 $(a,b,c) =$ _____。

高三_____班 座號_____ 姓名_____

一、單選題（每題 5 分，共 20 分）

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

二、多選題（每題 10 分，共 20 分）

1.	2.
----	----

三、填充題（每題 6 分，共 60 分）

1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	10.

高三_____班 座號_____ 姓名_____

一、單選題（每題 5 分，共 20 分）

1.	2.	3.	4.
(B)	(E)	(C)	(E)

二、多選題（每題 10 分，共 20 分）

1.	2.
(B)(C)(D)	(A)(B)(C)(D)

三、填充題（每題 6 分，共 60 分）

1. $\frac{47}{128}$	2. $\frac{1}{4}$	3. 6	4. $\frac{63}{64}$	5. 2
6. 52	7. 6	8. (7, 2)	9. 6	10. (-1, 8, -1)