

台北市立第一女子高級中學 110 學年度 第一學期

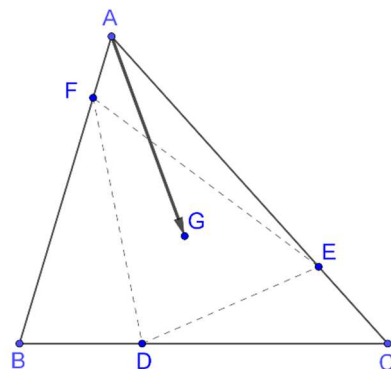
高二數 A 期末考 範圍：第 3 章全

一、填充題（共 76 分。）

答對 格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
填充 得分	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	64	68	72	76

- 已知平面上 $ABCD$ 為平行四邊形，其中三點為 $A(4,15)$ 、 $B(1,-13)$ 、 $C(17,-6)$ ，則
 - D 點坐標為 (A)。
 - 平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 (B)。
- 已知 $\vec{a} = (-11, 3)$ 、 $\vec{b} = (1, -1)$ 、 $\vec{c} = (5, -3)$ ，則
 - 若 $(\vec{a} + t\vec{b}) \parallel \vec{c}$ ，則 $t = \underline{(C)}$ 。
 - 若 $(\vec{a} + t\vec{b}) \perp \vec{c}$ ，則 $t = \underline{(D)}$ 。
 - 若在 $t = \alpha$ 時， $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 有最小值 m ，則數對 $(\alpha, m) = \underline{(E)}$ 。
- 將 $\vec{a} = (20, 22)$ 分解為兩個向量的和，其中一個向量 $\vec{p}$ 與 $\vec{b} = (-1, 4)$ 平行，另一個向量 $\vec{q}$ 與 $\vec{b}$ 垂直。
若 $\vec{p} = (r, s)$ 、 $\vec{q} = (t, u)$ ，則四元序對 $(r, s, t, u) = \underline{(F)}$ 。
- 已知 $|\vec{a}| = 3$ 、 $|\vec{b}| = 2$ ，且 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夾角為 60° ，則
 - $|4\vec{a} - 3\vec{b}| = \underline{(G)}$ 。
 - 兩向量 $(4\vec{a} - 3\vec{b})$ 與 $\vec{a}$ 的夾角為 (H)。
 - 兩向量 $(4\vec{a} - 3\vec{b})$ 與 $(2\vec{a} - 3\vec{b})$ 所張的平行四邊形面積為 (I)。

5. 已知 $A(-9,4)$ 、 $B(7,-4)$ ，若 P 點在直線 AB 上且滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=5:3$ ，
 P 點坐標為 (J)。(有兩解，兩個都對才給分。)
6. 已知實數 x, y 滿足 $4x^2 + 9y^2 = 36$ ，若當 $(x, y) = (\alpha, \beta)$ 時， $x - 2y$ 有最大值 M ，
 則三元序對 $(M, \alpha, \beta) = \underline{(K)}$ 。
7. 已知平面上有三個向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 滿足 $|\vec{a}|=3$ 、 $|\vec{b}|=4$ 、 $|\vec{c}|=5$ 。
 若 $s = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ ，則 s 的取值範圍為 (L)。
8. 小綠在平地上散步，他先從 O 點出發，往某方向直線前進 10 公尺到達 A 點，
 接著左轉 60° 後再直線前進 8 公尺到達 B 點，
 接著左轉 90° 後再直線前進 $2\sqrt{3}$ 公尺到達 C 點，
 則 C 點與原出發地 O 點的距離為 (M) 公尺。
9. 已知平面上有 $\triangle ABC$ ，分別取 D, E, F 為三邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 上一點，且滿足 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:2$ 、
 $\overline{CE}:\overline{EA}=1:3$ 、 $\overline{AF}:\overline{FB}=1:4$ ，
 再取 G 為 $\triangle DEF$ 的重心。
 若 $\vec{AG} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ ，則數對 $(x, y) = \underline{(N)}$ 。



二、混合題（共 24 分，除了第 2 題的(1)，其餘題目均需寫出解題過程。

請務必表現出「高中生應有的論證層次與書寫表達能力」。）

1. （12 分）已知 x, y 為實數。

(1) 若 $2x - y = 15$ ，試求 $x^2 + y^2$ 的最小值。（6 分）

(2) 若 $2x - y = 15$ ，試求 $x^2 - y^2$ 的最大值。（6 分）

2. （12 分）已知 O, G 分別為 $\triangle ABC$ 的外心、重心。

令 $\vec{a} = \vec{OA}$ 、 $\vec{b} = \vec{OB}$ 、 $\vec{c} = \vec{OC}$ 。

(1) 若 $\vec{OG} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ，

則三元序對 $(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（只需填寫答案，2 分。）

(2) 假設平面上有一點 H 滿足 $\vec{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ，

請證明： $\vec{AH} \perp \vec{BC}$ 、 $\vec{BH} \perp \vec{CA}$ 、 $\vec{CH} \perp \vec{AB}$ 。（6 分）

(3) 承(2)，若 $O(0,0)$ 、 $A(1,-7)$ 、 $B(-5,5)$ 、 $C(7,-1)$ ，試求 H 的坐標。（4 分）

【摘自網路數學情詩】（作者：不詳）

思念著往昔的線性相關

任憑時光飛逝

指向你的永遠是那不變的愛情向量

台北市立第一女子高級中學 110 學年度 第一學期

高二數 A 期末考 答案卷

班級：二年_____班 座號：_____ 姓名：_____

一、填充題（共 76 分）

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
填充得分	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	64	68	72	76

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)		(G)
(20, 22)	427	−9	8	$(7, 4\sqrt{2})$	(−4, 16, 24, 6)		$6\sqrt{3}$
(H)	(I)	(J)		(K)	(L)	(M)	(N)
30°	$18\sqrt{3}$	(1, −1) 或 (31, −16)		$(5, \frac{9}{5}, -\frac{8}{5})$	$0 \leq s \leq 12$	14	$(\frac{13}{45}, \frac{13}{36})$

二、混合題（共 24 分）

1. (6 分 + 6 分 = 12 分) (1) 答：45。 由柯西不等式可得 $(x^2 + y^2)[2^2 + (-1)^2] \geq (2x - y)^2$， 所以 $(x^2 + y^2) \cdot 5 \geq 15^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 45$。 且等號成立時，$\frac{x}{2} = \frac{y}{-1}$， 又因為 $2x - y = 15$，所以可解得 $(x, y) = (6, -3)$。 所以當 $(x, y) = (6, -3)$，滿足題目條件 $2x - y = 15$， 且使得 $x^2 + y^2$ 有最小值 45。 (2) 答：75。 因為 $2x - y = 15$，所以 $y = 2x - 15$， $x^2 - y^2 = x^2 - (2x - 15)^2$ $= -3x^2 + 60x - 225 = -3(x - 10)^2 + 75$， 故當 $x = 10$ 時，$y = 2x - 15 = 5$， 此時 $x^2 - y^2$ 有最大值 75。	2. (2 分 + 6 分 + 4 分 = 12 分) (1) $(x, y, z) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$。(2 分) (2) 因為 O 是 $\triangle ABC$ 的外心， 所以 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} \Rightarrow \left \overrightarrow{a} \right = \left \overrightarrow{b} \right = \left \overrightarrow{c} \right$。 因為 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$ $= [(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{a}] \cdot (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b})$ $= (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b})$ $= \left \overrightarrow{c} \right ^2 - \left \overrightarrow{b} \right ^2 = 0$，所以 $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$。 同理可證 $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$。 (3) 答：(3, -3)。 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (3, -3)$， 故 H 的坐標為 (3, -3)。
---	--