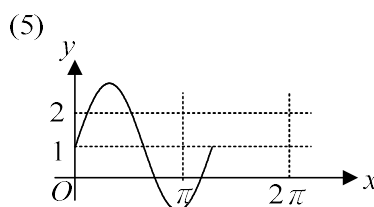
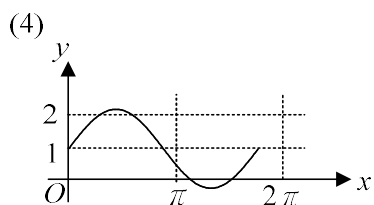
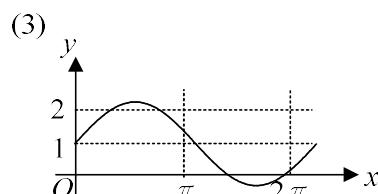
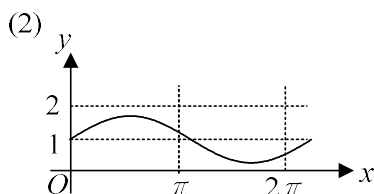
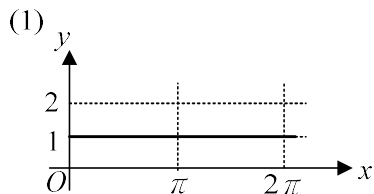


北一女中 110 學年度第一學期高三期末考數學甲試題

一、單選題

說明：第 1 至 4 題，每題選出最適當的一個選項，每題答對得 7 分，答錯不倒扣。

1、已知 k 為實數，則下列哪個選項不可能是函數 $y = 1 + k \cdot \sin kx$ 的圖形？



2、平面上的兩向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，已知 $|\vec{a}| = 4$ ， $|\vec{b}| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 且由 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 所張成的三角形面積為 1，則下列哪個選項可能為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角？

- (1) $\frac{\pi}{12}$ (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{5\pi}{12}$ (5) $\frac{5\pi}{6}$

3、生物學家克萊伯曾提出許多哺乳類動物的基礎代謝率 B （千卡／天）與其體重 M （公斤）滿足關係式（稱為克萊伯定律）：

$$B = kM^{\frac{3}{4}}, \text{ 其中 } k \text{ 為大於 } 0 \text{ 的常數。}$$

已知一隻貓的體重約為一隻老鼠的 100 倍，依克萊伯定律，試問貓的基礎代謝率約為老鼠之基礎代謝率的幾倍？

- (1) 10 (2) 20 (3) 30 (4) 40 (5) 50

4、袋中有 4 顆紅球，3 顆綠球。甲、乙、丙、丁四人依序各取 1 顆球，且取後不放回。若每顆球被取到的機率相同，則在甲、乙抽中同色球的條件下，丙、丁抽中不同色球的機率為下列哪個選項？

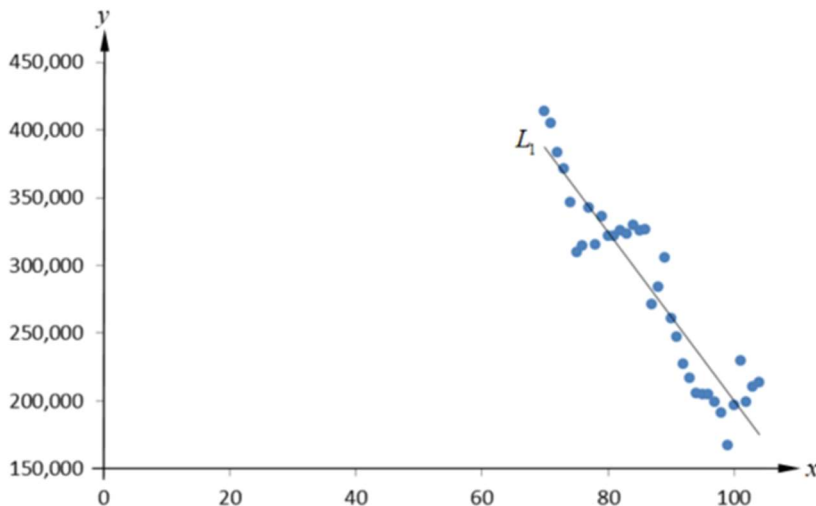
- (1) $\frac{8}{35}$ (2) $\frac{8}{15}$ (3) $\frac{3}{7}$ (4) $\frac{4}{7}$ (5) $\frac{2}{3}$

二、多選題

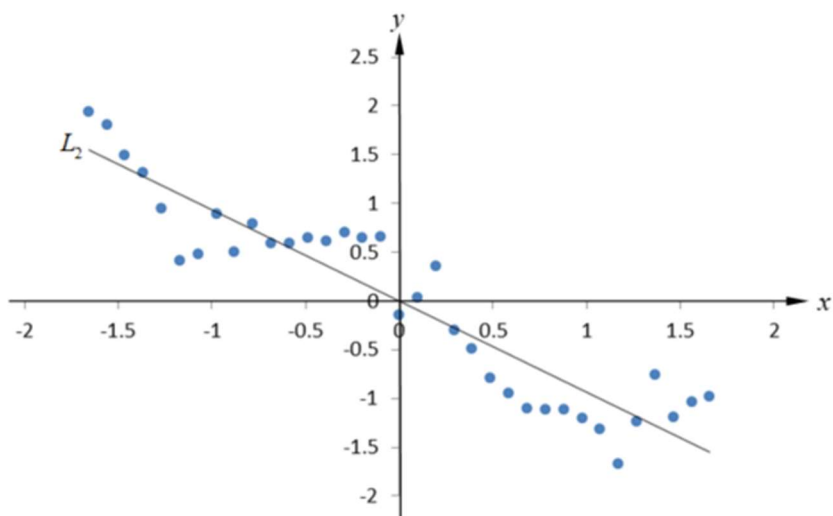
說明：第 5 至 7 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 8 分，答錯一個選項可得 5 分，答錯兩個選項得 2 分，未作答或答錯多於兩個選項者不給分。

5、小綠根據人口資料庫繪製民國 70 年到民國 104 年的「新生兒出生人數散布圖」，橫坐標 x 為時間(單位：年)，縱坐標 y 為新生兒人數(單位：人)，利用這 35 筆資料，以最小平方方法計算出 y 對 x 的迴歸直線方程式為

$L_1: y = -6242.3871x + 824252.6650$ 。如下圖所示：



接著小綠將 x 、 y 資料分別標準化後，重新繪製散布圖，並以最小平方方法計算出 y 對 x 的迴歸直線方程式為 $L_2: y = -0.9331x$ 。如下圖所示：



從上述資訊，試問下列選項哪些正確？

- (1)民國 70 年到民國 104 年的新生兒人數(y)逐年減少。
- (2)民國 105 年的新生兒人數必少於民國 104 年的新生兒人數。
- (3)時間(x)與新生兒人數(y)的相關係數 $r = -0.9331$ 。
- (4)可計算出民國 70 年到民國 104 年的新生兒人數(y)的平均值。
- (5)從民國 70 年到民國 104 年這 35 筆新生兒人數資料中，任意剔除其中 1 筆資料，將使時間(x)與新生兒人數(y)的相關係數變小。

6、已知二次函數 $f(x)$ 的頂點坐標為 $(2, 3)$ ， $g(x) = (x - 2)f(x)$ 。若將 $y = g(x)$ 的圖形向左平移 3 單位，向下平移 2 單位，平移後的圖形與 $y = h(x)$ 的圖形重合。試問下列選項哪些正確？

- (1)對任意的實數 x ， $f(x) > 0$ 恆成立。
- (2) $y = g(x)$ 的圖形對稱於 $(2, 0)$ 。
- (3) $h(x) = g(x + 3) - 2$ 。
- (4) $y = f(x)$ 的圖形與 $y = g(x)$ 的圖形有 3 個交點。
- (5) $y = g(x)$ 的圖形與 $y = h(x)$ 的圖形沒有交點。

7、如下圖，甲、乙兩人各自在圓形跑道上跑步，甲在 $x^2 + y^2 = 9$ 上自點 $A(0,3)$ 開始跑步，乙在 $(x-10)^2 + y^2 = 16$ 上自點 $B(14,0)$ 開始跑步，兩人同時出發，依逆時針方向前進，且各自以等速率每分鐘跑完 1 圈。若甲跑到 P 點時，乙恰好跑到 Q 點，設 $\angle BRQ = \theta$ 。試問下列選項哪些正確？

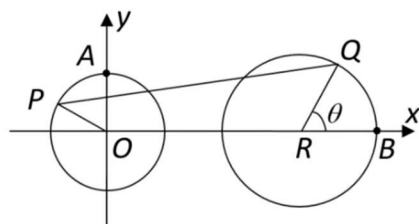
(1) $\angle AOP = \theta$ 。

(2) Q 點坐標可表為 $(10 + 4\cos\theta, 4\sin\theta)$ 。

(3) P 點坐標可表為 $(3\sin\theta, 3\cos\theta)$ 。

(4) $\overline{PQ}^2 = 60\sin\theta - 80\cos\theta + 125$ 。

(5) 跑步過程中，甲乙兩人的最遠距離為 15。

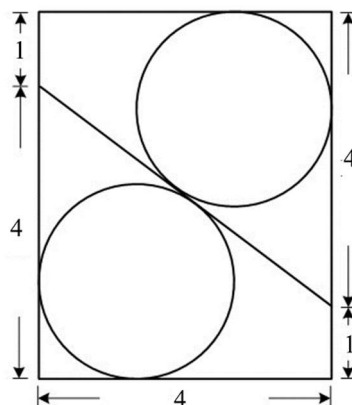


三、選填題

說明：第 8 至 12 題為填充題，每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

8、若實數 x 滿足 $|x-2| - |x+3| = 4$ ，則 $x = \frac{\textcircled{8}\textcircled{9}}{\textcircled{10}}$ 。

9、小綠設計了一個矩形窗戶，窗戶尺寸大小與設計圖樣，如圖所示，她希望窗戶內有一條分隔線，兩邊各嵌入一個圓形。若這兩個圓大小相同，且分別與矩形的兩邊和分隔線都相切，則圓的半徑為 $\frac{\textcircled{11}}{\textcircled{12}}$ 。



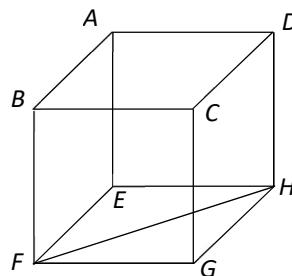
10、若空間坐標系中，滿足關係式 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ 1 & -2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的點 $P(x, y, z)$ 所形成的圖

形為一直線，其中 a, b 為實數，則數對 $(a, b) = \underline{(\textcircled{13}, \textcircled{14})}$ 。

11、空間坐標系中有一正立方體 $ABCD-EFGH$ ，如圖所示。

若已知頂點 $A(2, 3, -4)$ ，直線 FH 的方程式為

$\frac{x-10}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+4}{1}$ ，則此正立方體的邊長為 ⑮。



12、已知二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的係數 a, b, c ，是從 0, 1, 2, 5, 7 五個數字中任取三個相異的數字所組成。若此二次方程式有實根，則滿足條件的序對 (a, b, c) 共有 ⑯⑰ 組。

四、混合題或非選擇題(共 13 分)

說明：本部份共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區作答。
 選擇題與「非選擇題作圖部份」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

小綠在電腦軟體中設計一隻虛擬螞蟻的移動模式：坐標平面上，螞蟻由 $P_0(10,0)$ 出發，在兩點間以最短距離移動，依序通過 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 、 $\cdots$ 、

$P_5(x_5, y_5)$ 等 5 個點的座標。若各點坐標設置的規律為
$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{3}{10}x_n - \frac{3\sqrt{3}}{10}y_n, \\ y_{n+1} = \frac{3\sqrt{3}}{10}x_n - \frac{3}{10}y_n \end{cases},$$

其中 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 。試回答下列問題。

13、依上面所述，關於虛擬螞蟻移動的各種敘述，下列選項哪些正確？⑬

(多選題，8 分，依前述多選題方式計分。請在答案卡上第 18 題處作答。)

(1) P_1 點的坐標為 $(-3, 3\sqrt{3})$ 。

(2) 螞蟻從點 P_0 移動到點 P_1 ，移動距離為 14。

(3) 各點坐標設置的規律可表示為
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10} \\ \frac{3\sqrt{3}}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix},$$

其中 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 。

(4) P_0 點以原點 O 為旋轉中心，旋轉角度 α 可得 P_1 點，其中 $\cos \alpha = \frac{-3}{10}$ 。

(5) P_0 點以過原點 O 且斜角為 θ 的直線為鏡射軸，鏡射可得 P_1 點，其中 $\tan \theta = -\sqrt{3}$ 。

14、計算此虛擬螞蟻所走過的路徑總長度 $\overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_4P_5}$ 的值。

(非選擇題，5 分，請在答案紙上作答，必須寫出計算過程或理由。)

北一女中 110 學年度第一學期高三期末考數學甲答案卷

高三_____班_____號_____

四、混合題或非選擇題(共 13 分)

題號	作 答 區
13	本題為多選題，請在答案卡第 18 題處作答。
14	計算此虛擬螞蟻所走過的路徑總長度 $\overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_4P_5}$ 的值。 (非選擇題，5 分，必須寫出計算過程或理由。)

北一女中 110 學年度第一學期高三期末考數學甲答案卷(解答)

高三_____班_____號_____

一、 單選題：

1、(3)	2、(4)	3、(3)	4、(2)
-------	-------	-------	-------

二、

5、(3)(4)	6、(2)(3)	7、(1)(2)(5)
----------	----------	-------------

三、

8、 $-\frac{5}{2}$	9、 $\frac{4}{3}$	10、(2,1)	11、4	12、20
-------------------	------------------	----------	------	-------

四、混合題或非選擇題(共 13 分)

題號	作 答 區
13	(1)(2)(3) 本題為多選題，請在答案卡第 18 題處作答。
14	計算此虛擬螞蟻所走過的路徑總長度 $\overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_4P_5}$ 的值。 (非選擇題，5 分，必須寫出計算過程或理由。) 由於 $\begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10} \\ \frac{3\sqrt{3}}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix}$ 表示點 $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ 以原點為旋轉中心旋轉 120°，且以原點為中心，伸縮 $\frac{3}{5}$ 倍得到點 $P_n(x_n, y_n)$，其中 $n=1, 2, 3, 4, 5$。 因此 $\triangle OP_0P_1, \triangle OP_1P_2, \dots, \triangle OP_4P_5$ 為一系列的相似三角形， 所以 $\overline{P_{n-1}P_n} = \frac{3}{5} \overline{P_{n-2}P_{n-1}}$，其中 $n=2, 3, 4, 5$。 (2 分，需寫出等比的原因) 由 13 題知 $\overline{P_0P_1} = 14$， 故 $\overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_4P_5} = 14 \times \frac{1 - (\frac{3}{5})^5}{1 - \frac{3}{5}} \quad (2 \text{ 分})$ $= \frac{20174}{625} \quad (1 \text{ 分})$