

110 學年度第二學期第二次定期考高二數 A 試題

命題範圍：第二章空間中的平面與直線、第三章條件機率與獨立事件

壹、選擇（填）題（共 70 分）

一、單選題（每題 7 分，共 21 分）

1. 設空間中平面 E 的方程式為 $3x - y + 2z = 4$ ，若直線 L 與平面 E 平行（即沒有交點），試問 L 的方程式可以是下列哪一個選項？
(1) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ (2) $\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{2}, z=5$
(3) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ (4) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-2}{4}$ (5) y 軸
2. 甲袋中有 2 個紅球、3 個白球，乙袋中有 1 個紅球、4 個白球，丙袋中有 3 個紅球、2 個白球。今先擲一公正骰子，若點數為 1、2 或 3 則選甲袋，點數為 4 或 5 則選乙袋，點數為 6 則選丙袋；再由所選袋中一次取出兩球，設每球取出的機會均等。若已知取出兩球同為白球，則此兩球是由甲袋取出的機率最接近下列哪一個選項？
(1) 0.35 (2) 0.4 (3) 0.45 (4) 0.5 (5) 0.55
3. 編號 1~10 的正整數卡片各 1 張，將 10 張卡片放入袋後一次取出兩張，假設每張取出的機會均等。若 A 代表「兩張卡片中含有數字 5」的事件、 B 代表「兩張卡片數字乘積為奇數」的事件、 C 代表「兩張卡片數字和為偶數」的事件、 D 代表「兩張卡片數字和為奇數」的事件，請選出下列正確的選項。
(1) A 、 B 是獨立事件 (2) B 、 C 是獨立事件 (3) A 、 C 是獨立事件
(4) C 、 D 是獨立事件 (5) 以上皆非

二、多重選擇題（每題 7 分，共 28 分）

每題至少有一個正確或最適當的選項，每個選項均獨立判定，所有選項均答對者得 7 分，答錯 k 個選項者得 $7-3k$ 分，但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算

4. 足球賽每場有「勝」、「負」、「和」三種可能的結果，今甲、乙兩隊比賽兩場球賽，單場獲勝者可得積分 3 分、負者不得分，而若單場為和局，則兩隊均得 1 分。依照以往甲、乙對戰紀錄顯示，甲單場

獲勝的機率是 0.5，乙單場獲勝的機率是 0.4，單場兩隊和局的機率是 0.1，且每場結果均不互相影響。規定兩場比賽結束後，積分較多者可獨得全部獎金，若積分相等則平分獎金。請選出下列正確的選項。

- (1) 甲隊獨得全部獎金的機率大於 0.32
 - (2) 甲、乙兩隊平分獎金的機率小於 0.4
 - (3) 乙隊獨得全部獎金的機率小於 0.21
 - (4) 在「甲隊可以得到獎金」的條件下，「甲隊獨得全部獎金」的機率小於 0.5
 - (5) 在「乙隊可以得到獎金」的條件下，「乙隊獨得全部獎金」的機率小於 0.4
5. 設 A 點坐標為 $(1, 4, -3)$ ，直線 L 是空間中平面 $E_1: x - 2y - z - 5 = 0$ 與 $E_2: 2x - y + z - 1 = 0$ 的交線，若 E 是過 A 點且與 L 垂直的平面，請選出下列正確的選項。
- (1) 平面 E 的方程式為 $x - y - z = 0$
 - (2) 若 A 點在直線 L 上的投影點為 H ，則 H 的 z 坐標為 -2
 - (3) A 點到直線 L 的距離為 $\sqrt{14}$
 - (4) 設平面 E 與 E_1 的交線為 L_1 、平面 E 與 E_2 的交線為 L_2 ，則 L_1 與 L_2 兩直線所夾銳角小於 60°
 - (5) 若平面 E_3 的方程式為 $5(x - 2y - z - 5) - 2(2x - y + z - 1) = 0$ ，則 E 與 E_3 垂直
6. 2020 年爆發 Covid-19 感染，全世界許多遊輪也相繼傳出嚴重感染事件，由已知的統計資料得知，某遊輪上已感染者的客觀機率為 0.2、未感染者的機率為 0.8，當此遊輪停靠港口時，衛生單位決定上船檢驗所有人員。檢驗的方法有兩階段：第一階段以快篩試劑檢驗所有人，若快篩呈現陰性者則返家，而若快篩呈現陽性者則做第二階段的 PCR 檢測，若 PCR 檢測呈現陰性者則返家，若 PCR 檢測呈現陽性者則須隔離。根據快篩試劑廠商資料知，快篩檢測「將已感染者判為陰性」的機率為 0.2，「將未感染者判為陽性」的機率為 0.4。但 PCR 檢測未公布「將已感染者判為陰性」、「將未感染者判為陽性」的機率，廠商僅稱這兩個機率相等，假設此未知機率值為 x ($0 \leq x \leq 1$)。在所有檢測均可判讀出陽性或陰性反應的情況下，請選出下列正確的選項。

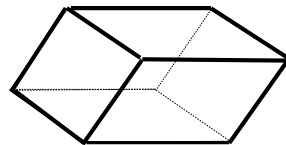
- (1) 遊輪上隨機抽選一人，經全程檢測後被隔離的機率表示為 $a+bx$ (a, b 是實數)，則 $b = 0.16$
- (2) 遊輪上隨機抽選一人，經全程檢測後被隔離的機率可能是 0.17
- (3) 遊輪上隨機抽選一人，經全程檢測後可返家的機率一定低於 0.8
- (4) 設 x 小於 0.01，若隨機抽選一名被隔離者，則他是未感染者的機率可能是 0.02
- (5) 設 x 小於 0.01，若隨機抽選一名返家者，則他是已感染者的機率一定低於 0.05

7. 平行六面體的每個面都是平行四邊形，設其三個稜邊分別在

L_1, L_2, L_3 這三條彼此歪斜的直線上，其中

$$L_1: \frac{x+4}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{1}, \quad L_2: \frac{x-5}{1} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-8}{2},$$

$$L_3: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{2}, \text{ 而不在這三條直線上}$$



的點 $(-2, 2, 3)$ 是平行六面體的其中一個頂點。假設在 L_1 上的 P 點

是此平行六面體的頂點，請選出正確的 P 點坐標選項。

- | | | |
|--------------------|--------------------|-------------------|
| (1) $(0, 4, -2)$ | (2) $(-2, 2, -3)$ | (3) $(-4, 0, -4)$ |
| (4) $(-6, -2, -5)$ | (5) $(-8, -4, -6)$ | |

三、選填題（每題 7 分，共 28 分，全對才給分）

A. 空間中三點 $A(0, -1, 4)$ 、 $B(1, 1, 1)$ 與 $C(-2, -2, 5)$ ，設 C 點在直線 AB 上的投影點坐標為 (a, b, c) ，其中 a, b, c

是實數，則數對 $(a, b, c) = \left(\frac{\textcircled{8} \textcircled{9}}{\textcircled{10}}, \frac{\textcircled{11} \textcircled{12}}{\textcircled{15}}, \frac{\textcircled{13} \textcircled{14}}{\textcircled{15}} \right)$ 。

（答案中的分數必須化至最簡分數）

B. 空間中平面 E 與兩歪斜直線 $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$,

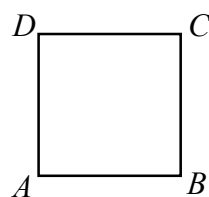
$L_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-4}$, 滿足 L_1 在 E 上的投影是一點, L_2 在 E 上的投影是

直線 L , 且點 $(3, -4, 2)$ 在平面 E 上。若 L 的方程式可表示為

$\frac{x+2}{1} = \frac{y-a}{c} = \frac{z-b}{d}$, 其中 a, b, c, d 是實數, 則數對

$(a, b, c, d) = (\textcircled{16} \textcircled{17} , \textcircled{18} , \textcircled{19} , \textcircled{20} \textcircled{21})$ 。

C. 如圖, 一動點 P 在正方形 $ABCD$ 的頂點上, 每分鐘在「逆時鐘方向移動到相鄰頂點」、「順時鐘方向移動到相鄰頂點」、「留在原地」三種可能中以 $\frac{1}{3}$ 的機率選擇其一方式移動, 如:



『 $A \xrightarrow{\text{逆}} B \xrightarrow{\text{留}} B \xrightarrow{\text{順}} A \xrightarrow{\text{順}} D \xrightarrow{\text{順}} C \xrightarrow{\text{留}} C$ 』是 P 從 A 地開始 6 分鐘後移動到 C 地的一種方式。已知一開始 P 的位置在 A 地, 試問 6 分鐘後, 選擇「留在原地」兩次且最後停留在 C 地的機率為

$\frac{\textcircled{22} \textcircled{23}}{\textcircled{24} \textcircled{25} \textcircled{26}}$ 。(答案中的分數必須化至最簡分數)

貳、混合題或非選擇題：(占 30 分)

第一題的五小題為單選題, 須將答案劃記在答案卡所標記的列號 (27-31),

每小題答對得 2 分。第二題每小題 4 分, (i)~(iv) 小題為填充題, 第(v)小題須寫出

證明過程

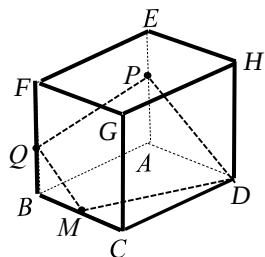
一. 袋中有 4 球, 黑、白、紅、綠色各一顆, 老師請 A 、 B 、 C 、 D 四位同學依照 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 的順序, 讓每人從袋中隨機抽出一球 (每球抽出機會相同、抽出不放回)。但由於第二位抽球的 B 同學堅持不要黑球, 事先約定輪到 B 抽球時若袋中還有黑球, 老師先將黑球取出再請 B 抽球, 待 B 抽完球後將剛取出的黑球放回袋中, 再繼

續請 C 、 D 依序抽球；而若 A 同學已抽出黑球則直接請 B 、 C 、 D 依序抽球。請選出下列五個小題正確的選項。

27. A 抽到黑球的機率等於 (1) $\frac{5}{24}$ (2) $\frac{6}{24}$ (3) $\frac{7}{24}$ (4) $\frac{8}{24}$ (5) $\frac{9}{24}$
28. B 抽到白球的機率等於 (1) $\frac{5}{24}$ (2) $\frac{6}{24}$ (3) $\frac{7}{24}$ (4) $\frac{8}{24}$ (5) $\frac{9}{24}$
29. C 抽到紅球的機率等於 (1) $\frac{5}{24}$ (2) $\frac{6}{24}$ (3) $\frac{7}{24}$ (4) $\frac{8}{24}$ (5) $\frac{9}{24}$
30. C 抽到黑球的機率等於 (1) $\frac{5}{24}$ (2) $\frac{6}{24}$ (3) $\frac{7}{24}$ (4) $\frac{8}{24}$ (5) $\frac{9}{24}$
31. D 抽到黑球的機率等於 (1) $\frac{5}{24}$ (2) $\frac{6}{24}$ (3) $\frac{7}{24}$ (4) $\frac{8}{24}$ (5) $\frac{9}{24}$

二. 如圖，邊長為 1 的正六面體 $ABCD-EFGH$

中， M 是稜邊 $\overline{BC}$ 的中點、且 P 是稜邊 $\overline{AE}$ 上的一動點，假設 $A(0,0,0)$ 、 $B(1,0,0)$ 、 $D(0,1,0)$ 、 $E(0,0,1)$ 、 $P(0,0,t)$ 其中 $0 < t < 1$ ，若平面 DMP 與稜邊 $\overline{BF}$ 交於 Q 點，試回答下面的問題：



- (i) 求平面 DMP 的方程式（係數以 t 表示）。
- (ii) 求 H 點到平面 DMP 的距離（以 t 表示）。
- (iii) 設平面 DMP 與 xy 平面所夾的銳角為 θ ，求 $\cos \theta$ 的值（以 t 表示）。
- (iv) 求四邊形 $DMQP$ 投影在 xy 平面上的面積。
- (v) 證明：四角錐 $H-DMQP$ 的體積是一個定值（與動點 P 的位置無關），並求此定值。

參考資料：

1. 角錐體積等於 $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$
2. 設 E_1 與 E_2 兩平面所夾的銳角為 θ ，且 $\triangle ABC$ 在平面 E_1 上，若 $\triangle ABC$ 投影在平面 E_2 上為 $\triangle A'B'C'$ ，則「 $\triangle A'B'C'$ 的面積」等於「 $\triangle ABC$ 的面積」 $\times \cos \theta$ 。